Orosz Ágota   Kaiser Zoltán

Diszkrét Matematika I. példatár

mobiDIÁK könyvtár

Orosz Ágota Kaiser Zoltán

Diszkrét Matematika I. példatár

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

Orosz Ágota

Kaiser Zoltán

Diszkrét Matematika I. példatár

egyetemi jegyzet

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem Informatikai Kar

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12
http://mobidiak.unideb.hu

A mű a *A mobiDIÁK önszervező mobil portál* (IKTA, OMFB-00373/2003) és a *GNU Iterátor, a legújabb generációs portál szoftver* (ITEM, 50/2003) projektek keretében készült.

Tartalomjegyzék

1. fejezet
Halmazok, relációk, függvények

1. Halmazok

1.1. Feladat. *Legyen X adott halmaz és $A, B, C \subset X$. Igazolja, hogy ekkor teljesülnek a következők:*

1. *$A \subset B$ és $B \subset A$ pontosan akkor, ha $A = B$,*
2. *$A \cup B = B \cup A$ és $A \cap B = B \cap A$, azaz az unió- és a metszetképzés kommutatív,*
3. *$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ és $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, azaz az unió- és a metszetképzés asszociatív,*
4. *$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ és $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, azaz teljesül a disztributivitás,*
5. *$A \cup A = A$ és $A \cap A = A$, azaz a metszet- és az unióképzés idempotens,*
6. *$A \cup \emptyset = A$ és $A \cap \emptyset = \emptyset$,*
7. *$A \cup X = X$ és $A \cap X = A$,*
8. *$\overline{\overline{A}} = A$,*
9. *$\overline{\emptyset} = X$ és $\overline{X} = \emptyset$,*
10. *$A \cup \overline{A} = X$ és $A \cap \overline{A} = \emptyset$,*
11. *$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ és $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (de Morgan-féle azonosságok),*
12. *$A \setminus B = A \cap \overline{B}$,*

Megoldás.

1. (a) Ha $A = B$, akkor a két halmaz elemei megegyeznek, azaz $x \in A \iff x \in B$. Ennélfogva $\forall\ x \in A$ esetén $x \in B$, így $A \subset B$. Hasonlóan kapjuk, hogy $B \subset A$.
   (b) Ha $A \subset B$ és $B \subset A$, akkor $x \in A \iff x \in B$, tehát a két halmaz egyenlő.
2. $x \in A \cap B \iff x \in A$ és $x \in B \iff x \in B$ és $x \in A \iff x \in B \cap A$. Hasonlóan látható be az unióképzés kommutativitása.
3. $x \in (A \cup B) \cup C \iff x \in A \cup B$ vagy $x \in C \iff (x \in A$ vagy $x \in B)$ vagy $x \in C \iff x \in A$ vagy $(x \in B$ vagy $x \in C) \iff x \in A$ vagy

$x \in B \cup C \iff x \in A \cup (B \cup C)$. Hasonlóan látható be a metszetképzés asszociativitása.

4. $x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in A$ vagy $x \in B \cap C \iff x \in A$ vagy ($x \in B$ és $x \in C$) $\iff$ ($x \in A$ és $x \in B$) vagy ($x \in A$ és $x \in C$) $\iff x \in A \cap B$ vagy $x \in A \cap C \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. A másik egyenlőség hasonlóan bizonyítható be.
5. $x \in (A \cup A) \iff x \in A$ vagy $x \in A \iff x \in A$. Hasonlóan látható be a metszetképzés idempotenciája.
6. (a) $x \in A \cup \emptyset \iff x \in A$ vagy $x \in \emptyset \iff x \in A$, hiszen az üres halmaznak nincsen eleme.
   (b) $x \in A \cap \emptyset \iff x \in A$ és $x \in \emptyset$. De ilyen x elem nem létezik, hiszen az üres halmaznak nincsen eleme. Tehát az $A \cap \emptyset$ halmaznak nincsen eleme, így $A \cap \emptyset = \emptyset$.
7. Az unióképzés definíciója miatt $X \subset A \cup X$. Viszont $A \subset X$ és $X \subset X$, így $A \cup X \subset X$ is teljesül. Felhasználva a feladat első részét kapjuk, hogy $X = A \cup X$. Hasonló gondolatmenettel igazolható a másik egyenlőség is.
8. $x \in \overline{\overline{A}} \iff x \notin \overline{A} \iff x \in A$.
9. $x \in \overline{\emptyset} \iff x \notin \emptyset$. Ezt a feltételt teljesíti az alaphalmaz minden eleme, így ez a halmaz maga az alaphalmaz, X. Ebből és az előzö pontból következik a másik egyenlőség.
10. (a) $x \in A \cup \overline{A} \iff x \in A$ vagy $x \in \overline{A} \iff x \in A$ vagy $x \notin A \iff x \in X$.
    (b) $x \in A \cap \overline{A} \iff x \in A$ és $x \in \overline{A} \iff x \in A$ és $x \notin A$. Ilyen elem nem létezik, tehát ennek a halmaznak nincsen eleme, így egyenlő az üres halmazzal.
11. $x \in \overline{(A \cup B)} \iff x \notin A \cup B \iff x \notin A$ és $x \notin B \iff x \in \overline{A}$ és $x \in \overline{B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. A másik egyenlőség hasonlóan bizonyítható be.
12. $x \in A \setminus B \iff x \in A$ és $x \notin B \iff x \in A$ és $x \in \overline{B} \iff x \in A \cap \overline{B}$.

1.2. Feladat. *Mivel egyenlő a $H = (A \cap (\overline{C} \setminus B)) \cup (A \setminus (B \cup C))$ halmaz, ha $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ páratlan$\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 15 \leq n\}$ és $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ hárommal osztható$\}$?*

Megoldás. A $\overline{C}$ halmaz elemei azon természetes számok, melyek hárommal nem oszthatók, így $\overline{C} \setminus B$ elemei a hárommal nem osztható 15-nél kisebb természetes számok. Ezek közül véve a páratlan számokat kapjuk az $A \cap (\overline{C} \setminus B)$ halmaz elemeit: $1, 5, 7, 11, 13$. Hasonlóan okoskodva kapjuk, hogy az $A \setminus (B \cup C)$ halmaz szintén ezt az öt elemet tartalmazza. H a két halmaz uniója, így $H = \{1, 5, 7, 11, 13\}$.

1.3. Feladat. *Legyen X adott halmaz és $A, B \subset X$. Vizsgálja meg, hogy milyen A és B halmazok esetén teljesülnek a következők:*

1. $A \cup B = A$,
2. $A \cap B = A$,
3. $A \cap B = \overline{A}$,
4. $A \cup B = \overline{A}$,
5. $A \setminus B = B \setminus A$,
6. $A \cup (B \cap \overline{A}) = B$,
7. $(A \cup B) \setminus B = A$,
8. $A \cup B = A \cap B$,

Megoldás.

1. Ha $A \cup B = A$, akkor az unióképzés definíciójából következik, hogy $B \subset A \cup B = A$, tehát $B \subset A$ szükséges feltétel. Továbbá $B \subset A$ teljesülése esetén nyilván teljesül az egyenlőség, tehát ez a feltétel elégséges is.
2. A metszetképzés definiciójából következik, hogy $A = A \cap B \subset B$. Továbbá, ha $A \subset B$, akkor $A \cap B = A$, tehát az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $A \subset B$.
3. A metszetképzés definiciójából következik, hogy $\overline{A} = A \cap B \subset A$. Ez csak akkor lehetséges, ha $\overline{A} = \emptyset$, hiszen egy halmaznak és a komplementerének nincsen közös eleme. Tehát $A = X$, így a feladat feltétele a következő alakra írható át: $X \cap B = \emptyset$. Ebből adódik, hogy $B = \emptyset$.
4. Az unióképzés definíciójából adódik, hogy $A \subset A \cup B = \overline{A}$, amely csak akkor teljesülhet, ha $A = \emptyset$ és $\overline{A} = X$. Ekkor a feltétel a következő alakra írható át: $\emptyset \cup B = X$, tehát $B = X$.
5. A feladat feltétele a következő alakra írható át: $A \cap \overline{B} = B \cap \overline{A}$. Ekkor $B \cap \overline{A} = A \cap \overline{B} \subset A$ és $B \cap \overline{A} \subset \overline{A}$. Így $B \cap \overline{A} = \emptyset$, hiszen A-nak és a komplementerének nincsen közös eleme. Ebből adódik, hogy $B \subset A$. Hasonlóan kapjuk, hogy $A \subset B$, tehát $A = B$. Másrészt, ha az A és a B halmaz egyenlőek, akkor az egyenlőség nyilván teljesül, így adódik, hogy $A \setminus B = B \setminus A$ pontosan akkor, ha $A = B$.
6. $A \cup (B \cap \overline{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) = (A \cup B) \cap X = A \cup B$. Így a feltétel a következő alakra hozható: $A \cup B = B$. Az 1. pont alapján ez pontosan akkor teljesül, ha $A \subset B$.
7. $(A \cup B) \setminus B = (A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup \emptyset = A \cap \overline{B}$. Így a feltétel a következő alakban írható: $A \cap \overline{B} = A$. A 2. pont alapján ez pontosan akkor teljesül, ha $A \subset \overline{B}$.
8. $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$, tehát $A \subset B$. Hasonlóan adódik, hogy $B \subset A$, azaz a két halmaz egyenlő. Másrészt, ha $A = B$, akkor az egyenlőség triviálisan teljesül, így $A \cup B = A \cap B \Longleftrightarrow A = B$.

1.4. Feladat. *Ha A, B, C páronként diszjunkt halmazok (azaz a metszetük üres), akkor mivel egyenlő az $((A \setminus B) \cap (C \setminus B)) \cup (\overline{C} \cap A) \cup (A \cap B \cap C)$ halmaz?*

Megoldás. Mivel $A \cap B = \emptyset$, így $A \subset \overline{B}$, tehát $A \setminus B = A \cap \overline{B} = A$. Hasonlóan kapjuk, hogy $C \setminus B = C$, $\overline{C} \cap A = A$, és nyilván $A \cap B \cap C = \emptyset$. Tehát $((A \setminus B) \cap (C \setminus B)) \cup (\overline{C} \cap A) \cup (A \cap B \cap C) = (A \cap C) \cup A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.

1.5. Feladat. *Legyen X adott halmaz, továbbá $A, B, C \subset X$, $A \subset B \subset C$. Mivel egyenlő az $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (A \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$ halmaz?*

Megoldás. Mivel $A \subset B \subset C$, így $A \cap B = A$, $A \cup C = C$, $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A}$ és $A \cup B \cup C = C$. Tehát $((A \cap B) \cup (\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (A \cup C)) \setminus (A \cup B \cup C) = (A \cup \overline{A} \cup C) \setminus C = (X \cup C) \setminus C = X \setminus C = \overline{C}$.

1.6. Feladat. *Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:*

1. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B)$,
2. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$,
3. $(A \cap (\overline{C} \setminus B)) \cup (A \setminus (B \cup C))$,
4. $A \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (C \cap (A \cup B)))$,

Megoldás.
Az átalakításokál az 1.1. feladatban igazolt egyenlőségeket használjuk.

1. $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) = (B \cup A) \cap (B \cup \overline{A}) = B \cup (A \cap \overline{A}) = B \cup \emptyset = B$.
2. Az előző pontban kapott eredményt felhasználva a következőt kapjuk: $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = ((A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B)) \cap (A \cup \overline{B}) = B \cap (A \cup \overline{B}) = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{B}) = (B \cap A) \cup \emptyset = B \cap A$.
3. $(A \cap (\overline{C} \setminus B)) \cup (A \setminus (B \cup C)) = A \cap (\overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{(B \cup C)}) = (A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})) \cup (A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
4. $A \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (C \cap (A \cup B))) =$
$A \cup (B \cap \overline{(A \cap B)}) \cup (C \cap \overline{(C \cap (A \cup B))}) =$
$A \cup (B \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \cup (C \cap (\overline{C} \cup \overline{(A \cup B)})) =$
$A \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{(A \cup B)}) =$
$((A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})) \cup (C \cap \overline{(A \cup B)}) = (A \cup B) \cup (C \cap \overline{(A \cup B)}) =$
$(A \cup B \cup C) \cap ((A \cup B) \cap \overline{(A \cup B)}) = A \cup B \cup C$.

1.7. Feladat. *Igazolja, hogy tetszőleges A, B és C hamazok esetén igazak az alábbi egyenlőségek:*

1. $A = A \cup (A \cap B)$,
2. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,
3. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ *és* $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
4. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ *és* $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$,
5. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$,

6. $(A \setminus (A \cap B)) \cup B = A \cup B$,
7. $\overline{(A \cup B)} \cap C = C \setminus (C \cap (A \cup B))$,

Megoldás.

1. $A \cap B \subset A$ és $A \subset A$, így $A \subset A \cup (A \cap B) \subset A$, amiből az állítás következik.
2. $A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{(A \cap B)} = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) = \emptyset \cup (A \setminus B)$ $= A \setminus B$.
3. (a) $A \setminus (B \cup C) = A \cap \overline{(B \cup C)} = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ $= (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
   (b) $A \setminus (B \cap C) = A \cap \overline{(B \cap C)} = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})$ $= (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
4. (a) $(A \cup B) \setminus C = (A \cup B) \cap \overline{C} = (A \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{C}) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
   (b) $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \cap \overline{C} = A \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{C} = (A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{C}) =$ $(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
5. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap \overline{B}) \cap C = (A \cap C) \cap \overline{B} = (A \cap C) \setminus B$.
   A második egyenlőség az ismert szabályokkal szintén levezethető, de abból is látszik, hogy az $A \cap C$ halmaz elemei C-nek elemei, így B-nek csak azon elemeit vesszük ki ebből a halmazból, amelyek benne vannak C-ben is, így benne vannak a $B \cap C$ halmazban. Tehát $(A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.
6. $(A \setminus (A \cap B)) \cup B = (A \cap \overline{(A \cap B)}) \cup B = (A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})) \cup B = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = A \cup B$.
7. $C \setminus (C \cap (A \cup B)) = C \cap \overline{(C \cap (A \cup B))} = C \cap (\overline{C} \cup \overline{(A \cup B)}) = =$ $(C \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{(A \cup B)}) = \overline{(A \cup B)} \cap C$.

1.8. Feladat. *Legyen $A := \{a, b, c\}$ ahol a, b és c különböző elemek. Sorolja fel A hatványhalmazának elemeit.*

Megoldás.

$$P(A) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\Big\}$$

1.9. Feladat. *Legyen A egy n elemű halmaz. Igazolja, hogy ekkor A hatványhalmazának 2^n darab eleme van.*

Megoldás. Azt kell megvizsgálni, hogy hányféleképpen képezhetünk részhalmazt A-ból. Legyen $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Vegyük A első elemét, a_1-et. Ezt az elemet vagy belerakjuk a részhalmazunkba, vagy nem. Ez összesen két lehetőség, két halmazunk van: $\emptyset$, $\{a_1\}$. Vegyük a második elemet, a_2-t. Az előző két halmaz mindegyike esetén további két halmazt kapunk aszerint, hogy belerakjuk a_2-t vagy sem. Így összesen $2 \cdot 2 = 4$ darab halmazunk van:

$\emptyset$, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_1, a_2\}$. Ezt folytatva, az $n-1$-edik lépésben már 2^{n-1} darab halmazunk lesz, melyek mindegyikéből további két darab halmazt kapunk aszerint, hogy a_n-et belerakjuk, vagy nem. Így összesen $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ darab részhalmazt kapunk. (A feladatnak egy másik bizonyíta a 2.51. feladatnál látható).

1.10. Feladat. *Legyenek A és B adott halmazok. Igazolja, hogy ekkor $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$ és $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$.*

Megoldás. $H \in P(A \cap B) \iff H \subset A \cap B \iff H \subset A$ és $H \subset B \iff H \in P(A)$ és $H \in P(B) \iff H \in P(A) \cap P(B)$. Tehát a két halmaznak ugyanazok az elemei.
Másrészt, $H \in P(A) \cup P(B) \iff H \in P(A)$ vagy $H \in P(B) \iff H \subset A$ vagy $H \subset B \implies H \subset A \cup B \iff H \in P(A \cup B)$. Így $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$. ($H \subset A \cup B$-ből nem következik, hogy $H \subset A$ vagy $H \subset B$!)
A fordított tartalmazás nem igaz. Például, ha $A := \{a\}$ és $B = \{b\}$, akkor $P(A) \cup P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\} \subsetneq \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} = P(A \cup B)$.

1.11. Feladat. *Igazoljuk, hogy tetszőleges A és $B_1, B_2, \ldots, B_n$ halmazokra*

(a) $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$,

(b) $A \cup (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B_i)$.

Megoldás. Csak az (a) részt bizonyítjuk, a másik egyenlőség hasonlóan igazolható. Teljes indukciót alkalmazunk (lásd 2.23. feladat). Az állítás $n = 1$ esetén triviálisan teljesül, $n = 2$-re pedig a disztributivitási szabályt kapjuk. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ esetén, azaz

$$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k) = \bigcup_{i=1}^{k} (A \cap B_i).$$

Felhasználva a disztibutivitást és az indukciós feltételünket, $n = k + 1$-re kapjuk: $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k \cup B_{k+1}) = (A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k)) \cup (A \cap B_{k+1})$ $= \left(\bigcup_{i=1}^{k} (A \cap B_i) \right) \cup (A \cap B_{k+1}) = \bigcup_{i=1}^{k+1} (A \cap B_i)$, ami éppen a bizonyítandó volt.

1.12. Feladat. *Legyen $I \neq \emptyset$ indexhalmaz, X halmaz, $\{A_i \subset X \mid i \in I\}$ indexelt halmazrendszer. Igazoljuk, hogy ekkor*

(a) $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$,

(b) $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$.

Megoldás.

(a) $x \in \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \iff x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \iff \exists i \in I$ úgy, hogy $x \notin A_i \iff \exists i \in I$ úgy, hogy $x \in \overline{A_i} \iff x \in \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$.

(b) $x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \iff x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \iff \forall i \in I$ esetén $x \notin A_i \iff \forall i \in I$ esetén $x \in \overline{A_i} \iff x \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$.

2. Relációk

1.13. Feladat. *Legyen $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$. Írjuk fel az $(A \times B) \cap (B \times A)$ és az $(A \times B) \setminus (B \times A)$ halmaz elemeit.*

Megoldás.

$$A \times B = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, a), (c, b)\},$$

$$B \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c)\}.$$

Ebből következik, hogy $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ és $(A \times B) \setminus (B \times A) = \{(c, a), (c, b)\}$.

1.14. Feladat. *Legyenek A, B, C és D tetszőleges halmazok. Igazolja, hogy ekkor teljesülnek a következők:*

1. $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset$ *vagy* $B = \emptyset$,
2. *ha A és B nem üres, akkor $A \times B = B \times A \iff A = B$,*
3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ *és* $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ *és* $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
5. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$ *és* $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$,
6. $A \times B \subset C \times D \iff A \subset C$ *és* $B \subset D$.

Megoldás.

1. Az állítás a Descartes-féle szorzat definíciójának következménye.
2. Legyen $A \times B = B \times A$. Ha $x \in A$, akkor $\exists y \in B$ úgy, hogy $(x, y) \in A \times B$. De ekkor $(x, y) \in B \times A$, tehát $x \in B$, így $A \subset B$. Hasonlóan kapjuk, hogy $B \subset A$, tehát $A = B$. Megfordítva, ha $A = B$, akkor $A \times B = A \times A = B \times A$ teljesül.
3. $(x, y) \in (A \cup B) \times C \iff x \in A \cup B$ és $y \in C \iff (x \in A$ vagy $x \in B)$ és $y \in C \iff (x \in A$ és $y \in C)$ vagy $(x \in B$ és $y \in C) \iff (x, y) \in A \times C$

vagy $(x,y) \in B \times C \iff (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$. A másik egyenlőség hasonlóan bizonyítható.

4. $(x,y) \in (A \cap B) \times C \iff x \in A \cap B$ és $y \in C \iff (x \in A$ és $x \in B)$ és $y \in C \iff (x \in A$ és $y \in C)$ és $(x \in B$ és $y \in C) \iff (x,y) \in A \times C$ és $(x,y) \in B \times C \iff (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$. A másik egyenlőség hasonlóan bizonyítható.
5. $(x,y) \in (A \setminus B) \times C \iff x \in A \setminus B$ és $y \in C \iff (x \in A$ és $x \notin B)$ és $y \in C \iff (x \in A$ és $y \in C)$ és $(x \notin B$ és $y \in C) \iff (x,y) \in A \times C$ és $(x,y) \notin B \times C \iff (x,y) \in (A \times C) \setminus (B \times C)$. A másik állítás hasonlóan bizonyítható.
6. Ha $A \subset C$ és $B \subset D$, akkor nyilván $A \times B \subset C \times D$. Fordítva, legyen $A \times B \subset C \times D$. Ekkor ha $x \in A$, akkor $\exists y \in B$ úgy, hogy $(x,y) \in A \times B$, tehát $(x,y) \in C \times D$, így $x \in C$, ezért $A \subset C$. Hasonlóan kapjuk, hogy $B \subset D$.

1.15. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi f relációk értelmezési tartományát, értékkészletét és inverzét:*

1. $f = \{(1,6),(2,2),(3,7),(3,2),(5,7)\}$,
2. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1/2,1,2\}$, $f = \{(x,y) \in A \times B | x \cdot y$ *páros egész szám*$\}$,
3. $A = \{-3,1,2,4\}$, $B = \{-1,0,4\}$, $f = \{(x,y) \in A \times B | x + y = 1\}$.

Megoldás.

1. $D_f = \{1,2,3,5\}$, $R_f = \{2,6,7\}$, $f^{-1} = \{(6,1),(2,2),(7,3),(2,3),(7,5)\}$.
2. $f = \{(1,2),(2,1),(2,2),(3,2),(4,1/2),(4,1),(4,2)\}$, így $D_f = A$, $R_f = B$, $f^{-1} = \{(1/2,4),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}$.
3. $f = \{(-3,4),(1,0),(2,-1)\}$, így $D_f = \{-3,1,2\}$, $R_f = \{-1,0,4\}$, $f^{-1} = \{(-1,2),(0,1),(4,-3)\}$.

1.16. Feladat. *Legyen $A = \{a,b,c,d\}$. Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek az alábbi A-n értelmezett relációk? Ekvivalencia reláció esetén adja meg az A halmaz megfelelő osztályozását, rendezés esetén pedig a halmaz megfelelő sorbarendezését.*

1. $f_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$,
2. $f_2 = \{(a,c),(b,b),(d,b),(a,a)\}$,
3. $f_3 = \{(c,b)\}$,
4. $f_4 = \{(a,d),(a,c),(d,b),(d,a),(c,a),(b,d)\}$,
5. $f_5 = \{(a,a),(a,d),(d,a),(d,d),(c,c),(c,b),(b,c),(b,b)\}$,
6. $f_6 = \{(a,a),(b,a),(a,b),(b,c),(c,b),(a,c),(c,c),(b,b),(c,a),(d,d)\}$,
7. $f_7 = \{(a,a),(a,c),(b,d),(d,d),(c,c),(c,d),(a,d),(b,a),(b,b),(b,c)\}$.

Megoldás.

1. A f_1 reláció reflexív, szimmetrikus, tranzitív, antiszimmetrikus, tehát ekvivalencia reláció és parciális rendezés is. Az ekvivalencia reláció által indukált osztályok: $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$.
2. A f_2 reláció nem reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és nem teljes. (Ha egy reláció nem reflexív, akkor nyilván teljes sem lehet.)
3. A f_3 reláció nem reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és nem teljes.
4. A f_4 reláció nem reflexív, szimmetrikus, nem tranzitív és nem teljes.
5. A f_5 reláció reflexív, szimmetrikus, tranzitív, így ekvivalencia reláció. Az ekvivalencia reláció által indukált osztályok: $\{a, d\}, \{b, c\}$.
6. A f_6 reláció reflexív, szimmetrikus, tranzitív, így ekvivalencia reláció. Az ekvivalencia reláció által indukált osztályok: $\{a, b, c\}, \{d\}$.
7. A f_7 reláció reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív, teljes, így rendezési reláció. Bevezetve a szokásos $\leq$ jelölést ($x \leq y$ ha xf_7y), a halmaz sorbarendése: $b \leq a \leq c \leq d$.

1.17. Feladat. *Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek az alábbi relációk? Ekvivalencia reláció esetén adja meg az adott halmaz megfelelő osztályozását.*

1. $f_1 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $xf_1y \iff x = y$,
2. $f_2 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $xf_2y \iff x \geq y$,
3. $f_3 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $xf_3y \iff x \mid y$,
4. $f_4 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $xf_4y \iff x \mid y$,
5. $f_5 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $xf_5y \iff x - y$ *páros*,
6. $f_6 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $xf_6y \iff x - y \in \mathbb{Q}$,
7. *Legyen* A *egy adott sík egyeneseinek halmaza,* $f_7 \subset A \times A$, $xf_7y \iff x$ *párhuzamos* y*-nal.*
8. *Legyen* A *egy adott sík egyeneseinek halmaza,* $f_8 \subset A \times A$, $xf_8y \iff x$ *metszi* y*-t.*
9. *Legyen* A *egy adott sík egyeneseinek halmaza,* $f_9 \subset A \times A$, $xf_9y \iff x$ *merőleges* y*-ra.*
10. *Legyen* A *adott halmaz,* $f_{10} \subset P(A) \times P(A)$, $xf_{10}y \iff x = y$.
11. *Legyen* A *adott halmaz,* $f_{11} \subset P(A) \times P(A)$, $xf_{11}y \iff x \subset y$.

Megoldás.

1. Az f_1 reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív és nem teljes, így ekvivalencia reláció és parciális rendezés is. A reláció által indukált osztályok az egy elemű halmazok: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots$.
2. Az f_2 reláció reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és teljes, így rendezési reláció.
3. Az f_3 reláció reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és nem teljes, így parciális rendezés.

4. Az f_4 reláció reflexív, tranzitív, nem szimmetrikus és nem antiszimmetrikus. Hiszen például $-2|2$ és $2|-2$, de $2 \neq -2$.
5. Az f_5 reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, így ekvivalencia reláció. Az indukált osztályok: $\{n \in \mathbb{N} |\ n \text{ páros}\}$ és $\{n \in \mathbb{N} |\ n \text{ páratlan}\}$.
6. A racionális és irracionális számok tulajdonságai alapján (lásd 2. fejezet 2. rész) belátható, hogy f_6 reflexív, szimmetrikus és tranzitív, így ekvivalencia reláció. Az indukált osztályok: $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q} + t := \{q + t |\ q \in \mathbb{Q}\}$ $(t \notin \mathbb{Q})$, azaz $\mathbb{Q}$ irracionális eltoltjai. Két osztály, $\mathbb{Q}+t_1$ és $\mathbb{Q}+t_2$ akkor különbözik egymástól, ha $t_1 - t_2$ irracionális.
7. Az f_7 reláció reflexív, szimmetrikus és tranzitív, azaz ekvivalencia reláció. A reláció által idukált osztályok az egymással párhuzamos egyeneseket tartalmazzák.
8. Az f_8 reláció reflexív, szimmetrikus, nem tranzitív, nem antiszimmetrikus és nem teljes.
9. Az f_9 reláció nem reflexív, szimmetrikus, nem tranzitív, nem antiszimmetrikus és nem teljes.
10. Az f_{10} reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus, tranzitív, így ekvivalencia reláció és parciális rendezés is. A reláció által indukált osztályok az egy részhalmazból álló halmazok.
11. Az f_{11} reláció reflexív, antiszimmetrikus, tranzitív és nem teljes, így parciális rendezés.

1.18. Feladat. *Legye A, B adott halmazok, $f \subset A \times B$ reláció. Igazolja, hogy ekkor*

(a) $D_{f^{-1}} = R_f$,
(b) $R_{f^{-1}} = D_f$,
(c) $(f^{-1})^{-1} = f$.

Megoldás.

(a) $x \in D_{f^{-1}} \iff \exists z \in A$ úgy, hogy $(x, z) \in f^{-1} \iff \exists z \in A$ úgy, hogy $(z, x) \in f \iff x \in R_f$.
(b) $x \in R_{f^{-1}} \iff \exists z \in B$ úgy, hogy $(z, x) \in f^{-1} \iff \exists z \in B$ úgy, hogy $(x, z) \in f \iff x \in D_f$.
(c) $(x, y) \in (f^{-1})^{-1} \iff (y, x) \in f^{-1} \iff (x, y) \in f$.

1.19. Feladat. *Legyenek A, B, C, D, E, F adott halmazok, $f \subset A \times B$, $g \subset C \times D$, $h \subset E \times F$ relációk. Bizonyítsuk be, hogy*

(a) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$,
(b) $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Megoldás.

(a) $(x,y) \in (f \circ g)^{-1} \iff (y,x) \in f \circ g \iff \exists z \in D_f \cap R_g$ úgy, hogy $(y,z) \in g$ és $(z,x) \in f \iff \exists z \in R_{f^{-1}} \cap D_{g^{-1}}$ úgy, hogy $(z,y) \in g^{-1}$ és $(x,z) \in f^{-1} \iff (x,y) \in g^{-1} \circ f^{-1}$.

(b) $(x,y) \in (f \circ g) \circ h \iff \exists z \in D_g \cap R_h \supset D_{f \circ g} \cap R_h$ úgy, hogy $(x,z) \in h$ és $(z,y) \in f \circ g \iff \exists z \in D_g \cap R_h$ úgy, hogy $(x,z) \in h$ és $\exists u \in D_f \cap R_g$ úgy, hogy $(z,u) \in g$ és $(u,y) \in f \iff \exists u \in D_f \cap R_g \supset D_f \cap R_{g \circ h}$ úgy, hogy $(x,u) \in g \circ h$ és $(u,y) \in f \iff (x,y) \in f \circ (g \circ h)$.

1.20. Feladat. *Legyen A egy adott halmaz és $f \subset A \times A$. Igazolja az alábbiakat:*

1. *$f = f^{-1} \iff f \subset f^{-1}$,*
2. *ha $f \neq \emptyset$, f irreflexív és szimmetrikus, akkor nem tranzitív (Az f relációt irreflexívnek nevezzük, ha $\forall x \in A$ esetén xfx nem teljesül.),*
3. *f tranzitív $\iff f \circ f \subset f$,*
4. *ha f reflexív és tranzitív, akkor $f \circ f = f$ (Így például, ha f ekvivalencia reláció vagy parciális rendezés, akkor $f \circ f = f$.),*
5. *f ekvivalencia reláció $\iff f^{-1}$ ekvivalencia reláció.*
6. *f parciális rendezés $\iff f^{-1}$ parciális rendezés.*

Megoldás.

1. Ha $f = f^{-1}$, akkor nyilván $f \subset f^{-1}$. Másrészt, legyen $f \subset f^{-1}$. Ekkor, ha $(x,y) \in f^{-1}$ akkor $(y,x) \in f \subset f^{-1}$. Így $(y,x) \in f^{-1}$, tehát $(x,y) \in f$. Ezért kaptuk, hogy $f \supset f^{-1}$, tehát $f = f^{-1}$.
2. Indirekt tegyük fel, hogy f tranzitív. $f \neq \emptyset$, így $\exists x, y \in A$ úgy, hogy $(x,y) \in f$. Mivel f szimmetrikus, ezért $(y,x) \in f$, és a tranzitivitás miatt $(x,x) \in f$, amely ellent mond az irreflexivitásnak.
3. Legyen f tranzitív. Ekkor, ha $(x,y) \in f \circ f$, akkor létezik $z \in A$ úgy, hogy $(x,z) \in f$ és $(z,y) \in f$. Felhasználva a tranzitivitást kapjuk, hogy $(x,y) \in f$, tehát $f \circ f \subset f$. Megfordítva, legyen $f \circ f \subset f$. Ekkor ha $(x,z) \in f$ és $(z,y) \in f$, akkor a relációk kompozíciójának definíciója miatt $(x,y) \in f \circ f \subset f$, azaz $(x,y) \in f$, tehát a f tranzitív.
4. f tranzitív, így az előző pontból következik, hogy $f \circ f \subset f$. Másrészt, mivel f reflexív, így $\forall x \in A$ esetén $(x,x) \in f$. Ezért ha $(x,y) \in f$, akkor $(x,y) \in f \circ f$, tehát $f \subset f \circ f$.
5. Az állítás egyszerűen adódik abból az észrevételből, hogy f szimmetrikus $\iff f = f^{-1}$.
6. Legyen f parciális rendezés. f reflexív, azaz $\forall x \in A$ esetén $(x,x) \in f$, így $\forall x \in A$ esetén $(x,x) \in f^{-1}$, tehát f^{-1} is reflexív. Ha $x \neq y$ és $(x,y) \in f^{-1}$, akkor $(y,x) \in f$, így f antiszimmetriája miatt $(x,y) \notin f$, ennélfogva $(y,x) \notin f^{-1}$, ezért f^{-1} is antiszimmetrikus. Végül, ha $(x,y) \in f^{-1}$ és $(y,z) \in f^{-1}$, akkor $(z,y) \in f$ és $(y,x) \in f$, így f

tranzitivitása miatt $(z,x) \in f$, tehát $(x,z) \in f^{-1}$, azaz f^{-1} is tranzitív. Azt kaptuk, hogy f^{-1} reflexív, szimmetrikus és tranzitív, tehát parciális rendezés. Ugyanígy látható be, hogy ha f^{-1} parciális rendezés, akkor f is az.

3. Függvények

1.21. Feladat. *Döntsük el, hogy az alábbi relációk közül melyek függvények:*

1. $A = \{1,2,4\}$, $B = \{3,6,12\}$, $f_1 \subset A \times B$, $xf_1y \iff xy = 12$,
2. $f_2 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $xf_2y \iff x = y$,
3. $f_3 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $xf_3y \iff x \geq y$,
4. $f_4 \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $xf_4y \iff x \mid y$,
5. *Legyen* P *a prímszámok halmaza,* $f_5 \subset P \times P$, $xf_5y \iff x| \; y$.
6. $f_6 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $xf_6y \iff x^2 = y^2$,
7. $f_7 \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $xf_7y \iff x^2 = y^2$,
8. $f_8 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $xf_8y \iff x^2 + y^2 = 4$.

Megoldás.

1. $f_1 = \{(1,12),(2,6),(4,3)\}$, tehát nyilván függvény.
2. f_2 nyilván függvény, egy elem csak saját magával áll relációban. (f_2 az $\mathbb{N}$ halmaz identikus függvénye.)
3. f_3 nem függvény, mert például $(3,1) \in f_3$ és $(3,2) \in f_3$.
4. f_4 nem függvény, mert például $(1,n) \in f_4$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.
5. f_5 függvény, mert $p,q \in P$, $p|q$ esetén $p = q$, azaz egy elem csak saját magával van relációban. (f_5 a P halmaz identikus függvénye.)
6. f_6 nem függvény, mert például $(1,-1) \in f_6$ és $(1,1) \in f_6$.
7. f_7 függvény, ugyanis $x^2 = y^2$ a pozitív valós számok halmazán csak $x = y$ esetén teljesül. (f_7 a pozitív valós számok identikus függvénye.)
8. f_8 nem függvény, mert például $(2,-2) \in f_8$ és $(2,2) \in f_8$.

1.22. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy az* $f : X \to Y$ *függvény akkor és csak akkor invertálható, ha bármely* $x, y \in X$ *esetén* $f(x) = f(y)$ *csak úgy lehetséges, ha* $x = y$.

Megoldás.

Legyen f invertálható. Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan $x, y \in X$ úgy, hogy $x \neq y$ de $f(x) = f(y) = z$. Ekkor $(x,z) \in f$ és $(y,z) \in f$, így $(z,x) \in f^{-1}$ és $(z,y) \in f^{-1}$, amely ellentmond annak, hogy f^{-1} függvény. Megfordítva, tegyük fel, hogy $f(x) = f(y)$ csak úgy lehetséges, ha $x = y$. Legyen $(z,x) \in f^{-1}$ és $(z,y) \in f^{-1}$. Ekkor $(x,z) \in f$ és $(y,z) \in f$, azaz

$z = f(x) = f(y)$, így a feltételünkből következik, hogy $x = y$, tehát f^{-1} függvény, azaz f invertálható.

1.23. Feladat. *Döntsük el, hogy az alábbi függvények közül melyek injektívek, szürjektívek illetve bijektívek. Amennyiben a függvény invertálható, határozzuk meg az inverz függvényét is.*

1. $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f_1(n) = 3n$,
2. $f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f_2(x) = 3x$,
3. $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f_3(n) = n^2$,
4. $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = x^2$,
5. $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f_5(x) = x^2$,
6. $f_6 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f_6(x) = x^2$,
7. $f_7 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f_7(x) = x^2$,
8. $f_8 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f_8(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

Megoldás.

1. f_1 nem szürjektív, hiszen például 2 nincs benne f_1 képhalmazában. Viszont $f(n) = 3n = 3m = f(m)$ csak $n = m$ esetén teljesülhet, így az 1.22. alapján f_1 injektív. A függvény inverze: $f_1^{-1} : 3 \cdot \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f^{-1}(n) = \frac{n}{3}$, ahol $3 \cdot \mathbb{N} := \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. (Az $f : X \to Y$, $f(x) = y$ invertálható függvény inverz függvényének kiszámításához ki kell fejezni x-et y segítségével, majd x és y szerepét felcserélni. Az értelmezési tartomány és az értékkészlet az 1.18. feladat alapján adódik.)
2. f_2 szürjektív, hiszen ha $y \in \mathbb{Q}$, akkor $f(y/3) = y$, tehát minden racionális szám benne van a függvény képhalmazában. Hasonlóan az előző ponthoz belátható, hogy f_2 injektív is, tehát bijektív. $f_2^{-1} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{x}{3}$.
3. f_3 nem szürjektív, például 2 nincs benne f_3 képhalmazában. Viszont injektív, és inverze: $f_3^{-1} : D \to \mathbb{N}$, $f_3^{-1}(n) = \sqrt{n}$, ahol $D := \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. f_4 nem szürjektív, hiszen a negatív valós számok nincsenek benne f_4 képhalmazában. f_4 nem is injektív, hiszen például $f(-2) = f(2) = 4$.
5. f_5 szürjektív, de nem injektív.
6. f_6 injektív, de nem szürjektív. $f_6^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f_6^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
7. f_7 injektív és szürjektív, így bijektív. $f_7^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f_7^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
8. f_8 nem szürjektív, mert 1 nem eleme a függvény képhalmazának. Viszont f_8 injektív, és $f_8^{-1}(x) = \frac{1+x}{1-x} = f_8(x)$.

1.24. Feladat. *Legyen $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ függvények. Igazolja, hogy ekkor az $f \circ g$ reláció is függvény, és ha $x \in D_{f \circ g}$, akkor $f \circ g(x) = f(g(x))$.*

Megoldás.
Legyen $(x, z_1) \in f \circ g$ és $(x, z_2) \in f \circ g$. Ekkor $\exists y_1 \in D_f \cap R_g$ úgy, hogy

$(x, y_1) \in g$ és $(y_1, z_2) \in f$, továbbá $\exists y_2 \in D_f \cap R_g$ úgy, hogy $(x, y_2) \in g$ és $(y_2, z_2) \in f$. Mivel g függvény, így $y_1 = y_2$. Ezért $z_1 = z_2$, mert f is függvény. Tehát $f \circ g$ függvény.
Továbbá, ha $z = (f \circ g)(x)$, akkor $(x, z) \in f \circ g$. Ekkor $\exists y \in D_f \cap R_g$ úgy, hogy $(x, y) \in g$ és $(y, z) \in f$, azaz $g(x) = y$ és $f(y) = z$, tehát $f(g(x)) = z = (f \circ g)(x)$.

1.25. Feladat. *Legyen $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$ függvények. Igazolja, hogy $D_{f\circ g} = D_g$ akkor és csak akkor, ha $R_g \subset D_f$. (Ellenkező esetben $D_{f\circ g} \subsetneq D_g$.)*

Megoldás.
Legyen $R_g \subset D_f$. Ekkor ha $x \in D_g$, akkor $\exists y \in R_g \subset D_f$, hogy $(x, y) \in g$ és $\exists z \in Z$ úgy, hogy $(y, z) \in f$, azaz $(x, z) \in f \circ g$, tehát $x \in D_{f\circ g}$. Így $D_g \subset D_{f\circ g}$, ami csak úgy lehetséges, ha $D_g = D_{f\circ g}$.
Megfordítva, legyen $D_{f\circ g} = D_g$ és $y \in R_g$. Ekkor $\exists x \in D_g$ úgy, hogy $(x, y) \in g$. Azonban $x \in D_{f\circ g}$, így $\exists z \in Z$ úgy, hogy $(x, z) \in f \circ g$. A kompozíció definíciójából következik, hogy $\exists y' \in R_g \cap D_f$ úgy, hogy $(x, y') \in g$ és $(y', z) \in f$. Mivel g függvény, ezért $y = y'$, tehát $y \in D_f$. Így $R_g \subset D_f$.

1.26. Feladat. *Határozzuk meg az $f \circ g$ függvényt az alábbi f és g függvények esetén:*

1. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4x$,*
2. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ és $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$,*
3. *$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ és $g :]0, 1[\to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 1$,*
4. *$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lg(x)$ és $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{1}{x^2}$.*

Megoldás.

1. $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(4x) = 5 \cdot (4x) = 20x$.
2. $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$.
3. $f \circ g :]0, 1[\to \mathbb{R}$, $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2+1}$.
4. $R_g = \mathbb{R}^-$, $D_f = \mathbb{R}^+$, így $R_g \cap D_f = \emptyset$, tehát $f \circ g = \emptyset$.

1.27. Feladat. *Legyenek $g : X \to Y$ és $f : Y \to Z$ adott függvények. Igazoljuk, hogy*

(a) ha f és g injektív, akkor $f \circ g$ is injektív,
(b) ha f és g szürjektív, akkor $f \circ g$ is szürjektív,
(c) ha f és g bijektív, akkor $f \circ g$ is bijektív.

Megoldás.

(a) Tegyük fel, hogy $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y)$, ahol $x, y \in X$. Felhasználva az 1.24. feladat eredményeit, ekkor $f(g(x)) = f(g(y))$, így f injektivitásából adódik, hogy $g(x) = g(y)$, melyből g injektivitása miatt kapjuk, hogy $x = y$, tehát az 1.22. feladat alapján $f \circ g$ injektív.
(b) g és f szürjektivitása miatt $(f \circ g)(X) = f(g(X)) = f(Y) = Z$, tehát $f \circ g$ is szürjektív.
(c) Az állítás az előző két állítás következménye.

1.28. Feladat. *Legyenek $g : X \to Y$ és $f : Y \to Z$ adott függvények. Előfordulhat-e, hogy*

(a) f és g valamelyike nem injektív, de $f \circ g$ injektív?
(b) f és g valamelyike nem szürjektív, de $f \circ g$ szürjektív?
(c) f és g valamelyike nem bijektív, de $f \circ g$ bijektív?

Megoldás.

(a) Igen, előfordulhat. Például, legyen $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, és legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Ekkor $f \circ g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2$. Így az 1.23. feladat 4. és 6. pontja alapján f nem injektív, de $f \circ g$ injektív.
(b) Igen, előfordulhat. Például, legyen $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, és legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$. Ekkor $f \circ g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $(f \circ g)(x) = x^2$. Így g nem szürjektív, hiszen például a 0 nincs benne a képhalmazában. Viszont az 1.23. feladat 7. pontja alapján $f \circ g$ szürjektív.
(c) Igen, előfordulhat. Például, legyen $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, és legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$. Ekkor $f \circ g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $(f \circ g)(x) = x^2$. Ekkor sem g, sem f nem bijektív, de $f \circ g$ bijektív.

1.29. Feladat. *Legyen $f : X \to Y$ függvény. Igazolja, hogy ekkor*

1. *$f \circ i_X = f$ és $i_Y \circ f = f$,*
2. *ha f invertálható, akkor $f^{-1} \circ f = i_X$,*
3. *ha f invertálható, akkor $(f \circ f^{-1})(y) = y$ minden $y \in R_f$ esetén, így ha f szürjektív, akkor $f \circ f^{-1} = i_Y$,*
4. *ha f invertálható, akkor f^{-1} is invertálható és inverzfüggvénye f.*

Megoldás.

1. $f \circ i_X = f$ belátásához ellenőrizni kell, hogy a két függvény értékkészlete megegyezik-e, továbbá a függvényértékek egyenlőek-e az értelmezési tartomány pontjaiban. $R_{i_X} = X = D_f$, így az 1.25. feladat alapján $D_{f \circ i_X} = D_{i_X} = X = D_f$. Továbbá $(f \circ i_X)(x) = f(i_X(x)) = f(x)$, tehát a két függvény valóban egyenlő. A második egyenlőség hasonlóan igazolható.

2. Az 1.18. feladat alapján $R_f = D_{f^{-1}}$, így $D_{f^{-1}\circ f} = D_f = X = D_{i_X}$. Legyen $x \in X$ és $y := f(x)$. Ekkor $f^{-1}(y) = x$, így $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = i_X(x)$.
3. $D_f = R_{f^{-1}}$, így $D_{f\circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = Y = D_{i_Y}$. Legyen $y \in R_f$ és $x := f^{-1}(y)$. Ekkor $f(x) = y$, így $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = i_Y(y)$.
4. Az állítás következik az inverz függvény definíciójából.

1.30. Feladat. *Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *adott függvény,* $A := \{0, 1, 2\}, B := [-2, 2]$ *és* $C =]0, 1[$. *Határozzuk meg az* $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ *és* $f^{-1}(C)$ *halmazokat, ha*

1. $f(x) := 4x$,
2. $f(x) := |x - 2|$,
3. $f(x) := \sqrt{x^2 + 1}$,
4. $f(x) := \sin(x)$.

(Adott $f : X \to Y$ *függvény esetén egy* $H \subset Y$ *halmaz ősképe vagy inverz képe az* $f^{-1}(H) := \{x \in X \mid f(x) \in H\}$ *halmaz.)*

Megoldás.

1. $f(A) = \{0, 4, 8\}$, $f(B) = [-8, 8]$, $f(C) =]0, 4[$, $f^{-1}(A) = \{0, 1/4, 1/2\}$, $f^{-1}(B) = [-1/2, 1/2]$, $f^{-1}(C) =]0, 1/4[$.
2. $f(A) = \{0, 1, 2\} = A$, $f(B) = [0, 4]$, $f(C) =]1, 2[$, $f^{-1}(A) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $f^{-1}(B) = [0, 4]$, $f^{-1}(C) =]1, 2[\cup]2, 3[$.
3. $f(A) = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{5}\}$, $f(B) = [1, \sqrt{5}]$, $f(C) =]1, \sqrt{2}[$, $f^{-1}(A) = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$, $f^{-1}(B) = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, $f^{-1}(C) = \emptyset$.
4. $f(A) = \{0, \sin(1), \sin(2)\}$, $f(B) = [0, 1]$, $f(C) =]0, \sin(1)[$, $f^{-1}(A) = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/2 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $f^{-1}(B) = \mathbb{R}$, $f^{-1}(C) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$.

1.31. Feladat. *Legyen* $f : X \to Y$ *adott függvény,* $A, B \subset X$, $C, D \subset Y$. *Bizonyítsuk be, hogy*

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, *és* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ *teljesül minden* $A, B \subset X$ *halmaz esetén* $\iff$ f *invertálható,*
3. $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$ *és* $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$ *teljesül minden* $A, B \subset X$ *halmaz esetén* $\iff$ f *invertálható,*
4. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$,
5. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$,
6. $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$,
7. *ha* $A \subset B$, *akkor* $f(A) \subset f(B)$,

8. *ha* $C \subset D$, *akkor* $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$,
9. $A \subset f^{-1}(f(A))$ *és* $A = f^{-1}(f(A))$ *teljesül minden* $A \subset X$ *halmaz esetén* $\iff f$ *invertálható,*
10. $f(f^{-1}(C)) \subset C$ *és* $f(f^{-1}(C)) = C$ *teljesül minden* $C \subset Y$ *halmaz esetén* $\iff f$ *szürjektív.*

Megoldás.

1. $y \in f(A \cup B) \iff \exists x \in A \cup B$, melyre $f(x) = y \iff y \in f(A)$ vagy $y \in f(B) \iff y \in f(A) \cup f(B)$.
2. $y \in f(A \cap B) \iff \exists x \in A \cap B$, melyre $f(x) = y \Longrightarrow y \in f(A)$ és $y \in f(B) \iff y \in f(A) \cap f(B)$. Így $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ ($y \in f(A) \cap f(B)$-ből nem következik, hogy $\exists x \in A \cap B$, melyre $f(x) = y$!).
   A fordított tartalmazás nem mindig igaz. Például, ha $f(x) = |x|$, $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$, akkor $f(A) = f(B) = [0, 1]$, míg $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$.
   Most bebizonyítjuk, hogy a fordított tartalmazás akkor és csak akkor teljesül minden $A, B \subset X$ halmaz esetén, ha f invertálható. Legyen f invertálható, $A, B \subset X$ és $y \in f(A) \cap f(B)$. Ekkor $y \in f(A)$ és $y \in f(B)$, azaz $\exists x_1 \in A$, melyre $f(x_1) = y$, továbbá $\exists x_2 \in B$, melyre $f(x_2) = y$. Mivel f invertálható, csak egy olyan $x \in X$ létezhet, melyre $f(x) = y$, így $x = x_1 = x_2 \in A \cap B$, tehát $y \in f(A \cap B)$, azaz $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
   Fordítva, tegyük fel, hogy minden $A, B \subset X$ esetén $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Indirekt tegyük fel, hogy f nem invertálható, azaz $\exists x_1, x_2 \in X$, melyekre $f(x_1) = f(x_2) = y$ és $x_1 \neq x_2$. Azonban ha $A := \{x_1\}$, $B := \{x_2\}$, akkor $f(A \cap B) = \emptyset$, de $f(A) \cap f(B) = \{y\} \cap \{y\} = \{y\}$, amely ellentmondás.
3. $y \in f(A) \setminus f(B) \iff y \in f(A)$ és $y \notin f(B) \Longrightarrow \exists x \in A \setminus B$ úgy, hogy $f(x) = y \iff y \in f(A \setminus B)$. Így $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$ (Abból, hogy $\exists x \in A \setminus B$, melyre $f(x) = y$, nem következik, hogy $y \in f(A)$ és $y \notin f(B)$!).
   A fordított tartalmazás nem feltétlenül igaz. A feladat 2. részének bizonyításánál definiált f függvény és A, B halmazok esetén $f(A) \setminus f(B) = \emptyset$, míg $f(A \setminus B) = f(]0, 1]) =]0, 1]$.
   A fordított tartalmazás szükséges és elégséges feltételének igazolásához először tegyük fel, hogy f invertálható, $A, B \subset X$ és $y \in f(A \setminus B)$. Ekkor $\exists x_1 \in A \setminus B$ úgy, hogy $f(x_1) = y$, így $y \in f(A)$. Viszont f injektivitása miatt nem létezhet $x_2 \in B$, melyre $f(x_2) = y$, ezért $y \notin f(B)$, tehát $y \in f(A) \setminus f(B)$, azaz $f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$.
   Másrészt, tegyük fel, hogy minden $A, B \subset X$ esetén $f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus$

$f(B)$. Indirekt tegyük fel, hogy f nem invertálható, azaz $\exists x_1, x_2 \in X$, melyekre $f(x_1) = f(x_2) = y$ és $x_1 \neq x_2$. Legye $A := \{x_1\}$, $B := \{x_2\}$. Ekkor $f(A \setminus B) = f(A) = \{y\}$, de $f(A) \setminus f(B) = \emptyset$, amely ellentmondás.

4. $x \in f^{-1}(C \cup D) \iff f(x) \in C \cup D \iff f(x) \in C$ vagy $f(x) \in D \iff x \in f^{-1}(C)$ vagy $x \in f^{-1}(D) \iff x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
5. $x \in f^{-1}(C \cap D) \iff f(x) \in C \cap D \iff f(x) \in C$ és $f(x) \in D \iff x \in f^{-1}(C)$ és $x \in f^{-1}(D) \iff x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
6. $x \in f^{-1}(C \setminus D) \iff f(x) \in C \setminus D \iff f(x) \in C$ és $f(x) \notin D \iff x \in f^{-1}(C)$ és $x \notin f^{-1}(D) \iff x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.
7. Az állítás következik a halmaz képének definíciójából.
8. Az állítás következik a halmaz ősképének definíciójából.
9. $x \in A \implies f(x) \in f(A) \iff x \in f^{-1}(f(A))$. Tehát $A \subset f^{-1}(f(A))$ ($f(x) \in f(A)$-ból nem következik, hogy $x \in A$!).
   A fordított tartalmazás nem feltétlenül igaz. A feladat 2. részének bizonyításánál definiált f függvény és A halmaz esetén $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([0,1]) = [-1,1]$.
   Most megmutatjuk, hogy az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $A \subset X$ halmaz esetén, ha f invertálható. Eőször legyen f inverálható és $x \in f^{-1}(f(A))$. Ekkor $f(x) \in f(A)$, és felhasználva f injektivitását adódik, hogy $x \in A$. Így $f^{-1}(f(A)) \subset A$ is teljesül, tehát a két halmaz egyenlő.
   Másrészt, legyen $f^{-1}(f(A)) = A$ minden $A \subset X$ esetén és indirekt tegyük fel, hogy f nem invertálható, azaz $\exists x_1, x_2 \in X$, melyekre $f(x_1) = f(x_2) = y$ és $x_1 \neq x_2$. Legyen $A := \{x_1\}$. Ekkor $f(A) = \{y\}$ és $f^{-1}(f(A)) = \{x_1, x_2\}$, tehát $A \neq f^{-1}(f(A))$, amely ellentmondás.
10. $y \in f(f^{-1}(C)) \iff \exists x \in f^{-1}(C)$ úgy, hogy $y = f(x) \implies f(x) \in C$ azaz $y \in C$. Tehát $f(f^{-1}(C)) \subset C$ ($y \in C$-ből nem következik, hogy $\exists x \in f^{-1}(C)$, melyre $y = f(x)$. Ugyanis előfordulhat, hogy y nincs benne f képterében!).
    A fordított tartalmazás nem feltétlenül teljesül. Legyen például $f = |x|$ és $C := [-1, 0]$. Ekkor $f(f^{-1}(C)) = f(\{0\}) = \{0\}$.
    Az egyenlőség feltételének bizonyításához tegyük fel, hogy $f(f^{-1}(C)) = C$ minden $C \in Y$ halmaz esetén. $C = Y$ választásával adódik, hogy $f(f^{-1}(Y)) = Y$, tehát $R_f \supset Y$, amely csak $R_f = Y$ esetén lehetséges.
    Másrészt, ha f nem szürjektív, akkor $f(f^{-1}(Y)) \neq Y$, tehát az egyenlőség nem teljesül minden $C \subset Y$ halmazra.

1.32. Feladat. *Legyen $f : X \to Y$ függvény, $I \neq \emptyset$ indexhalmaz, $\{A_i \subset X \mid i \in I\}$ indexelt halmazrendszer. Igazoljuk, hogy ekkor*

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$,

2. $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$,

3. $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$,

4. $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$.

Megoldás.

1. $y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, melyre $f(x) = y \Longleftrightarrow \exists i \in I$ úgy, hogy $x \in A_i$ és $y \in f(A_i) \Longleftrightarrow y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
2. $y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, melyre $f(x) = y \Longrightarrow y \in f(A_i)$ minden $i \in I$ esetén $\Longleftrightarrow y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. Tehát $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ ($y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$-ből nem következik, hogy $\exists x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, melyre $f(x) = y$!). A fordított tartalmazás nem mindig igaz. Ellenpélda az 1.31. példa 2. részének megoldásában található.
3. $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \exists i \in I$ úgy, hogy $f(x) \in A_i$ $\Longleftrightarrow \exists i \in I$ úgy, hogy $x \in f^{-1}(A_i) \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$.
4. $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcap_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow f(x) \in A_i$ minden $i \in I$ esetén $\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A_i)$ minden $i \in I$ esetén $\Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i)$.

2. fejezet
Számfogalmak

1. Valós számok

2.1. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{R}$-ben az egységelem és a nullelem egyértelműen létezik.*

Megoldás. Tegyük fel, hogy két nullelem létezik: 0_1 és 0_2. Ekkor $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$, tehát a két nullelem egyenlő egymással.

Hasonlóan, ha két egységelem létezik: 1_1 és 1_2, akkor $1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2$.

2.2. Feladat. *Legyen $x, y, z \in \mathbb{R}$. Igazolja, hogy ekkor*

(a) ha $x + y = x + z$, akkor $y = z$ (az összeadás egyszerűsítési szabálya),
(b) ha $x \neq 0$ és $xy = xz$, akkor $y = z$ (a szorzás egyszerűsítési szabálya).

Megoldás.

(a) A testaxiómákat felhasználva kapjuk, hogy $y = y+0 = y+(x+(-x)) = (y + x) + (-x) = (x + y) + (-x) = (x + z) + (-x) = (z + x) + (-x) = z + (x + (-x)) = z + 0 = z$.
(b) $y = y \cdot 1 = y(xx^{-1}) = (yx)x^{-1} = (xy)x^{-1} = (xz)x^{-1} = (zx)x^{-1} = z(xx^{-1}) = z \cdot 1 = z$.

2.3. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ számnak egyértelműen létezik az additív inverze, és ha $x \neq 0$, akkor egyértelműen létezik a multiplikatív inverze is.*

Megoldás. Tegyük fel, hogy x-nek két additív inverze létezik, a_1 és a_2. Ekkor azonban $x + a_1 = 0 = x + a_2$, így az összeadás egyszerűsítési szabálya alapján $a_1 = a_2$. Hasonlóan, amennyiben $x \neq 0$, tegyük fel hogy m_1 és m_2 is multiplikatív inverze. Ekkor $xm_1 = 1 = xm_2$, így a szorzás egyszerűsítési szabálya alapján kapjuk, hogy $m_1 = m_2$.

2.4. Feladat. *Legyen $x, y \in \mathbb{R}$. Igazolja, hogy ekkor*

1. $0 \cdot x = 0$,
2. $xy = 0$ *pontosan akkor, ha* $x = 0$ *vagy* $y = 0$,
3. $-x = (-1)x$ *és* $-(x + y) = -x - y$,

4. *$-(-x) = x$, és ha $x \neq 0$, akkor $(x^{-1})^{-1} = x$,*
5. *$(-x)y = x(-y) = -(xy)$ és $(-x)(-y) = xy$,*
6. *egyértelműen létezik $z \in \mathbb{R}$, amelyre $x = y + z$ (kivonási szabály, z jele $x - y$),*
7. *ha $y \neq 0$, akkor egyértelműen létezik $z \in \mathbb{R}$, amelyre $x = yz$ (osztási szabály, z jele $\frac{x}{y}$ vagy $x : y$.),*
8. *$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.*

Megoldás.

1. $0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = 0x + 0$, így az összeadás egyszerűsítési szabálya alapján kapjuk az állítást.
2. Ha $x = 0$ vagy $y = 0$, akkor nyilván $xy = 0$. Fordítva, indirekt tegyük fel, hogy $xy = 0$, de $x \neq 0$ és $y \neq 0$. Ekkor azonban $0 = x^{-1} \cdot 0 = x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = 1 \cdot y = y$, feltevésünkkel ellentétben.
3. A feladat 1. részének felhasználásával $x + (-x) = 0 = 0x = (1 + (-1))x = 1 \cdot x + (-1)x = x + (-1)x$, így az összeadás egyszerűsítési szabálya alapján $(-x) = (-1)x$. Így $-(x + y) = (-1)(x + y) = (-1)x + (-1)y = -x + (-y) = -x - y$.
4. $(-x) + x = 0 = (-x) + -(-x)$, így az összeadás egyszerűsítési szabálya alapján $x = -(-x)$. Másrészt, ha $x \neq 0$, akkor $x^{-1}x = 1 = x^{-1}(x^{-1})^{-1}$, így a szorzás egyszerűsítési szabálya alapján $x = (x^{-1})^{-1}$.
5. $xy + (-x)y = (x + (-x))y = 0y = 0$, így a 2.3. feladat alapján xy-nak az additív inverze $(-x)y$, azaz $(-x)y = -(xy)$. Hasonlóan, $xy + x(-y) = x(y + (-y)) = x0 = 0$ alapján $-(xy) = x(-y)$. Végül, felhasználva az előző pontot kapjuk, hogy $(-x)(-y) = -(x(-y)) = -(-(xy)) = xy$.
6. Legyen $z = x + (-y)$. Ekkor $y + z = y + (x + (-y)) = (y + ((-y) + x) = (y + (-y)) + x = 0 + x = 0$, tehát z létezését beláttuk. Az egyértelműség az összeadás egyszerűsítési szabályából következik.
7. Legyen $z = xy^{-1}$. Ekkor $yz = y(xy^{-1}) = y(y^{-1}x) = (yy^{-1}x) = 1 \cdot x = x$, tehát z létezését beláttuk. Az egyértelműség a szorzás egyszerűsítési szabályából következik.
8. $(xy)(x^{-1}y^{-1}) = ((xy)x^{-1})y^{-1} = ((xx^{-1})y)y^{-1} = (1 \cdot y)y^{-1} = yy^{-1} = 1$, így a 2.3. feladat alapján $x^{-1}y^{-1} = (xy)^{-1}$.

2.5. Feladat. *Legyenek $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ és $v \neq 0$. Igazolja, hogy ekkor*

1. $\dfrac{-x}{-y} = \dfrac{x}{y}$ *és* $\dfrac{-x}{y} = \dfrac{x}{-y} = -\dfrac{x}{y}$,
2. $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{u}{v} = \dfrac{xu}{yv}$, *és ha $u \neq 0$, akkor* $\dfrac{x}{y} : \dfrac{u}{v} = \dfrac{xv}{yu}$,

3. $\dfrac{x}{y} + \dfrac{u}{v} = \dfrac{xv + uy}{yv}$ *és* $\dfrac{x}{y} - \dfrac{u}{v} = \dfrac{xv - uy}{yv}$,
4. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{xv}{yv}$.
5. $\dfrac{x}{y} + \dfrac{u}{y} = \dfrac{x + u}{y}$.

Megoldás.

1. $\dfrac{-x}{-y} = (-x)(-y)^{-1} = \big((-1)x\big)\big((-1)y\big)^{-1} = \big((-1)x\big)\big((-1)^{-1}y^{-1}\big) = \big((-1)(-1)^{-1}\big)(xy^{-1}) = xy^{-1} = \dfrac{x}{y}$.
   Hasonlóan $\dfrac{-x}{y} = (-x)y^{-1} = \big((-1)x\big)y^{-1} = (-1)(xy^{-1}) = -\dfrac{x}{y}$, továbbá $-\dfrac{x}{y} = (-1)(xy^{-1}) = x\big((-1)^{-1}y^{-1}\big) = x(-y)^{-1} = \dfrac{x}{-y}$, ahol felhasználtuk, hogy $(-1)^{-1} = -1$.
2. $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{u}{v} = (xy^{-1})(uv^{-1}) = (xu)(y^{-1}v^{-1} = (xu)(yv)^{-1} = \dfrac{xu}{yv}$.
   Másrészt, ha $u \neq 0$, akkor
   $$\begin{aligned} \frac{x}{y} : \frac{u}{v} &= \frac{x}{y}\left(\frac{u}{v}\right)^{-1} = (xy^{-1})(uv^{-1})^{-1} = (xy^{-1})\big((u^{-1}(v^{-1})^{-1}\big) = \\ &= (xy^{-1})(vu^{-1}) = (xv)(y^{-1}u^{-1}) = (xv)(yu)^{-1} = \frac{xv}{yu}. \end{aligned}$$
3. A korábbi eredményeket felhasználva
   $$\begin{aligned} \frac{x}{y} + \frac{u}{v} &= xy^{-1} + uv^{-1} = (xy^{-1})(vv^{-1}) + (uv^{-1})(yy^{-1}) = \\ &= (xv)(y^{-1}v^{-1}) + (uy)(y^{-1}v^{-1}) = \\ &= (xv)(yv)^{-1} + (uy)(yv)^{-1} = (xv + uy)(yv)^{-1} = \frac{xv + uy}{yv}. \end{aligned}$$
   Ennek alapján
   $$\frac{x}{y} - \frac{u}{v} = \frac{x}{y} + \left(-\frac{u}{v}\right) = \frac{x}{y} + \frac{-u}{v} = \frac{xv + (-u)y}{yv} = \frac{xv - uy}{yv}.$$
4. $\dfrac{xv}{yv} = (xv)(yv)^{-1} = (xv)(y^{-1}v^{-1}) = (xy^{-1})(vv^{-1}) = xy^{-1} = \dfrac{x}{y}$.
5. $\dfrac{x}{y} + \dfrac{u}{y} = \dfrac{xy + uy}{y \cdot y} = \big((x + u)y\big)(y^{-1}y^{-1}) = (x + u)y^{-1} = \dfrac{x + u}{y}$.

2.6. Feladat. *Azt mondjuk, hogy $x < y$ ha $x \leq y$ és $x \neq y$. Igazolja, hogy bármely $x, y, u \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következők:*

1. *az $x < y$, $x = y$, $y < x$ esetek közül pontosan egy teljesül (trichotomia),*

2. *ha* $x < y$, *akkor* $x + u < y + u$ *(összeadás monotonitása),*
3. *ha* $0 < x$ *és* $0 < y$, *akkor* $0 < xy$ *(szorzás monotonitása),*
4. *ha* $x \leq y < u$ *vagy* $x < y \leq u$, *akkor* $x < u$.

Megoldás.

1. A rendezési reláció és a $<$ reláció definíciója alapján nyilvánvaló.
2. Ha $x < y$, akkor $x \leq y$. $\mathbb{R}$ rendezett test, így $x+u \leq y+u$. Az összeadás egyszerűsítési szabálya miatt $x + u \neq y + u$ (ellenkező esetben $x = y$ következne), tehát $x + u < y + u$.
3. Ha $0 < x$ és $0 < y$, akkor $0 \leq x$ és $0 \leq y$, tehát $0 \leq xy$. Ha $xy = 0$ teljesülne, akkor a 2.4. feladat 2. része alapján $x = 0$ vagy $y = 0$ következne, amely nem lehetséges. Tehát $0 < xy$.
4. A feltételekből következik, hogy $x \leq y \leq u$, így $\leq$ tranzitivitása miatt $x \leq u$. Ha $x = u$ teljesülne, akkor az $x = y = u$ egyenlőségnek is teljesülnie kellene, amely ellentmond a feltételeknek.

2.7. Feladat. *Legyenek* $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. *Igazolja, hogy ekkor*

1. $x \leq y \Longleftrightarrow 0 \leq y - x \Longleftrightarrow -y \leq -x$,
2. $x < y \Longleftrightarrow 0 < y - x \Longleftrightarrow -y < -x$,
3. *ha* $x \leq y$ *és* $0 \leq u$, *akkor* $xu \leq yu$; *ha* $x \leq y$ *és* $u \leq 0$, *akkor* $yu \leq xu$,
4. *ha* $x < y$ *és* $0 < u$, *akkor* $xu < yu$; *ha* $x < y$ *és* $u < 0$, *akkor* $yu < xu$,
5. *ha* $x \leq y$ *és* $u \leq y$, *akkor* $x + u \leq y + v$,
6. *ha* $x \leq y$ *és* $u < y$, *akkor* $x + u < y + v$,
7. *ha* $0 \leq x \leq y$ *és* $0 \leq u \leq v$, *akkor* $xu \leq yv$,
8. *ha* $0 < x \leq y$ *és* $0 \leq u < v$, *akkor* $xu < yv$,
9. *ha* $x \neq 0$, *akkor* $0 < x \cdot x$, *speciálisan* $0 < 1$,
10. *ha* $0 < x$, *akkor* $0 < \dfrac{1}{x}$, *és ha* $x < 0$, *akkor* $\dfrac{1}{x} < 0$,
11. *ha* $0 < x \leq y$, *akkor* $\dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$, *és ha* $x \leq y < 0$, *akkor* $\dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$,
12. *ha* $0 < x < y$, *akkor* $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$, *és ha* $x < y < 0$, *akkor* $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$,
13. *ha* $x \leq y \leq u \leq v$, *akkor* $u - y \leq v - x$.

Megoldás.

1. Ha $x \leq y$, akkor $x + (-x) \leq y + (-x)$, azaz $0 \leq y - x$. Megfordítva, ha $0 \leq y-x$, akkor $0+x \leq y-x+x$, tehát $x \leq y$. A második egyenlőtlenség hasonlóan bizonyítható.
2. Az állítás bizonyítása a $<$ reláció monotonitását használva az előző pont bizonyításával azonos.

3. Ha $x \le y$, akkor $0 \le y - x$. Amennyiben $0 \le u$, akkor $0 \le (y-x)u = yu - xu$, tehát $xu \le yu$. Másrészt, ha $u \le 0$, akkor $0 \le -u$, így $0 \le (y-x)(-u) = xu - yu$, azaz $yu \le xu$.
4. Az előző pont bizonyításához hasonló módon kapjuk az állítást: Ha $x < y$, akkor $0 < y - x$. Amennyiben $0 < u$, akkor $0 < (y-x)u = yu - xu$, tehát $xu < yu$. Másrészt, ha $u < 0$, akkor $0 < -u$, így $0 < (y-x)(-u) = xu - yu$, azaz $yu < xu$.
5. Ha $x \le y$ és $u \le v$, akkor $x + u \le y + u$ és $y + u \le y + v$, tehát $x + u \le y + v$.
6. Az előző pont bizonyításához hasonló módon kapjuk az állítást.
7. Ha $0 \le x \le y$ és $0 \le u \le v$, akkor $xu \le yu$ és $yu \le yv$, így $xu \le yv$.
8. Az előző pont bizonyításához hasonló módon kapjuk az állítást.
9. Ha $x > 0$, akkor a 2.6. feladat 3. része alapján $x \cdot x > 0$. Ha $x < 0$, akkor $-x > 0$, így $0 < (-x)(-x) = -(-x)(x) = x \cdot x$.
10. Legyen $0 < x$ és indirekt tegyük fel, hogy $\dfrac{1}{x} < 0$. Ekkor azonban a 4. pont alapján $1 = x \cdot \dfrac{1}{x} \le 0 \cdot \dfrac{1}{x} = 0$, ami ellentmondás. A másik egyenlőtlenség hasonlóan igazolható.
11. Ha $0 < x \le y$, akkor $0 < \dfrac{1}{x}$ és $0 < \dfrac{1}{y}$, ezért $0 < \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y}$. Így 3. miatt $\left(\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y}\right) x \le \left(\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{y}\right) y$, azaz $\dfrac{1}{y} \le \dfrac{1}{x}$. Másrészt, ha $x \le y < 0$, akkor 1. és 2. miatt $0 < -y < -x$. Ezért $\dfrac{1}{-x} \le \dfrac{1}{-y}$, azaz $-\dfrac{1}{x} \le -\dfrac{1}{y}$, tehát $\dfrac{1}{y} \le \dfrac{1}{x}$.
12. Az előző pont bizonyításához hasonló módon kapjuk az állítást.
13. $x \le y$, így $-y \le -x$, ezért $u - y \le u - x$. Felhasználva, hogy $u - x \le v - x$ (mert $u \le v$) kapjuk, hogy $u - y \le v - x$.

2.8. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy az abszolút érték függvényre bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következők:*

1. *$|x| \ge 0$, és $|x| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $x = 0$ (pozitív definitség),*
2. *$|-x| = |x|$,*
3. *$|xy| = |x||y|$ (multiplikativitás),*
4. *$x \ne 0$ esetén $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$,*
5. *$y \ne 0$ esetén $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$,*
6. *$|x| \le y \iff -y \le x \le y$, továbbá $|x| < y \iff -y < x < y$,*

7. *$|x+y| \le |x| + |y|$ (háromszög egyenlőtlenség),*
8. *$\big||x| - |y|\big| \le |x-y|$.*

Megoldás.

1. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ha $x = 0$, akkor $|x| = x = 0$. Ha $x \neq 0$, akkor két eset lehetséges. Ha $x > 0$, akkor $|x| = x > 0$. Ha $x < 0$, akkor a 2.7. feladat 1. pontja alapján $|x| = -x > -0 = 0$.
2. Az abszolút érték definíciója alapján nyilvánvaló.
3. Az abszolút érték definíciója alapján nyilvánvaló.
4. Ha $x > 0$, akkor $\dfrac{1}{x} > 0$, így $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{|x|}$. Másrészt, ha $x < 0$, akkor $\dfrac{1}{x} < 0$, ezért $\left|\dfrac{1}{x}\right| = -\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{|x|}$.
5. A feladat 3. és 4. része alapján $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \left|x \cdot \dfrac{1}{y}\right| = |x| \left|\dfrac{1}{y}\right| = |x| \dfrac{1}{|y|} = \dfrac{|x|}{|y|}$.
6. Ha $x \ge 0$, akkor $|x| \le y \Longleftrightarrow 0 \le x \le y$. Ha $x < 0$, akkor a 2.7. feladat 4. pontja alapján $-x > 0$. Ekkor $|x| \le y \Longleftrightarrow 0 < -x \le y \Longleftrightarrow -y \le x < 0$. A két eset együttesen adja, hogy $|x| \le y \Longleftrightarrow -y \le x \le y$. A másik állítás hasonlóan igazolható.
7. Nyilván $x \le |x|$ és $y \le |y|$, ezért $x+y \le |x|+|y|$. Hasonlóan, $-x \le |x|$ és $-y \le |y|$, így $-(x+y) \le |x|+|y|$, ennélfogva $-(|x|+|y|) \le x+y$. Tehát $-(|x|+|y|) \le x+y \le |x|+|y|$, melyből az előző pont felhasználásával adódik az állítás.
8. Az előzőek alapján $|x| = |x-y+y| \le |x-y|+|y|$, tehát $|x|-|y| \le |x-y|$. Másrészt, $|y| = |y-x+x| \le |x-y| + |x|$, így $-|x-y| \le |x| - |y|$. A 6. pontot alkalmazva kapjuk az állítást.

2.9. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy a $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ távolságra teljesülnek a következők:*

(a) $d(x,y) \ge 0$, továbbá $d(x,y) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = y$ (nem negativitás),
(b) $d(x,y) = d(y,x)$ (szimmetria),
(c) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$ (háromszög-egyenlőtlenség).

Megoldás. Az abszolút érték függvény tulajdonságait felhasználva kapjuk az állításokat:

(a) $d(x,y) = |x-y| \ge 0$, és $d(x,y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x - y = 0$, azaz ha $x = y$.
(b) $d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |y-x| = d(y,x)$.
(c) $d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \le |x-z| + |z-y| = d(x,y) + d(y,z)$.

2. Természetes számok, egész számok, racionális számok

2.10. Feladat. *Legyen $n, m \in \mathbb{N}$. Mutassa meg, hogy*

1. $n + m \in \mathbb{N}$,
2. $nm \in \mathbb{N}$,
3. *ha* $n \neq 1$, *akkor* $n - 1 \in \mathbb{N}$,
4. *ha* $n \neq m$, *akkor* $n - m \in \mathbb{N}$ *vagy* $m - n \in \mathbb{N}$.

Megoldás.

1. Legyen $M := \{n \in \mathbb{N} \mid \text{minden } m \in \mathbb{N} \text{ esetén } n+m \in \mathbb{N}\}$. A természetes számok definíciója alapján $1 \in M$. Tegyük fel, hogy $k \in \mathbb{N}$, azaz minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $k + m \in \mathbb{N}$. Ekkor viszont $(k+1)+m = k+(m+1) \in \mathbb{N}$ minden $m \in \mathbb{N}$ esetén, hiszen $m + 1 \in \mathbb{N}$. Tehát $k + 1 \in M$, így a teljes indukció elve alapján $M = \mathbb{N}$, melyből következik az állítás.
2. Legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzített. Nyilván $n = 1$-re teljesül az állítás, hiszen $1 \cdot m = m \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy valamely $n = k \in \mathbb{N}$ esetén $k \cdot m \in \mathbb{N}$. Ekkor, alkalmazva az előző pontot, $(k + 1)m = km + m \in \mathbb{N}$, így $n = k + 1$-re is igaz az állítás, tehát a teljes indukció elve alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén igaz. Mivel m tetszőleges volt, adódik az állítás.
3. Legyen $M := \{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 1 \text{ és } n-1 \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$. Ekkor nyilván $1 \in M$. Tegyül fel, hogy valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén $k \in M$. Ekkor $(k + 1) - 1 = k \in \mathbb{N}$, tehát $k + 1 \in M$, melyből a teljes indukció elve alapján kapjuk, hogy $M = \mathbb{N}$.
4. Legyen $m \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Az előző pont miatt $n = 1$-re teljesül az állítás. Tegyül fel, hogy valamely $n = k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül az állítás. Ha $k - m \in \mathbb{N}$, akkor $(k + 1) - m = (k - m) + 1 \in \mathbb{N}$ a feladat 1. része miatt. Ha $m-k \in \mathbb{N}$, és $m-k \neq 1$, akkor $m-(k+1) = (m-k)-1 \in \mathbb{N}$ a feladat 3. része miatt. Végül, ha $m - k \in \mathbb{N}$ és $m - k = 1$, akkor $m = k + 1$, így nem teljesül a $k + 1 \neq m$ feltétel. Ezek alapján tehát $n = k + 1$-re is igaz az állítás.

2.11. Feladat. *Legyen $k, l \in \mathbb{Z}$. Igazolja, hogy ekkor $k + l \in \mathbb{Z}$, $kl \in \mathbb{Z}$ és $-k \in \mathbb{Z}$.*

Megoldás. Mivel $k, l \in \mathbb{Z}$, így léteznek olyan n_1, n_2, m_1, m_2 természetes számok, hogy $k = n_1 - m_1$ és $l = n_2 - m_2$. Ekkor azonban $k + l = (n_1 + n_2) - (m_1 + m_2)$, $kl = (n_1n_2 + m_1m_2) - (n_1m_2 + n_2m_1)$, $-k = m_1 - n_1$, így a 2.10. feladat alapján ezen számok felírhatóak két természetes szám különbségeként, tehát egész számok.

2.12. Feladat. *Legyen* $p, q \in \mathbb{Q}$. *Igazolja, hogy ekkor* $p + q$, pq, $-p$ *és ha* $p \neq 0$, *akkor* $\frac{1}{p}$ *is racionális szám (így* $\mathbb{Q}$ *testet alkot az összeadásra és szorzásra nézve).*

Megoldás. Mivel $p, q \in \mathbb{Q}$, így léteznek olyan k_1, k_2, l_1, l_2 egész számok, hogy $p = \frac{k_1}{l_1}$ és $q = \frac{k_2}{l_2}$. Ekkor a 2.5. feladat alapján $p + q = \frac{k_1 l_2 + k_2 l_1}{l_1 l_2}$, $pq = \frac{k_1 k_2}{l_1 l_2}$, $-p = \frac{-k_1}{l_1}$ és $\frac{1}{p} = \frac{l_1}{k_1}$, így felhasználva a 2.11. feladatot ezek a számok felírhatóak két egész szám hányadosaként, tehát valóban racionális számok.

2.13. Feladat. *Mutassa meg, hogy* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$, *tehát létezik irracionális szám.*

Megoldás. Bebizonyítjuk, hogy ha $p \in \mathbb{N}$ prímszám, akkor $\sqrt{p}$ irracionális. Tegyük fel indirekt, hogy p racionális szám. Ekkor azonban van olyan $n, m \in \mathbb{N}$, melyek egymással relatív primek (legnagyobb közös osztójuk 1), és $\sqrt{p} = \frac{n}{m}$. Így $pn^2 = m^2$, tehát $p|m$, ezért $p^2|m^2$, ennélfogva $p^2|pn^2$, következésképpen $p|n$, mely ellentmond n és m relatív prím voltának.

2.14. Feladat. *Legyen* $r \in \mathbb{Q}$ *és* $v \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Mutassa meg, hogy ekkor* $r + v \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *továbbá, ha* $r \neq 0$, *akkor* $rv \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Megoldás. Indirekt tegyük fel, hogy $r + v = q \in \mathbb{Q}$. Ekkor azonban az előző feladat alapján $v = r + (-q) \in \mathbb{Q}$, mely ellentmondás.

Hasonlóan, indirekt tegyük fel, hogy $rv = q \in \mathbb{Q}$. Ekkor $v = r\frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$, tehát ellentmondásra jutottunk.

2.15. Feladat. *Adjon meg két olyan irracionális számot, melyek összege illetve szorzata racionális.*

Megoldás. Ha x irracionális, akkor könnyen látható, hogy $-x$ is irracionális, de $x + (-x) = 0 \in \mathbb{Q}$. Másrészt, ha $p \in \mathbb{N}$ prímszám, akkor a 2.13. feladat megoldása alapján $\sqrt{p}$ irracionális, viszont $\sqrt{p} \cdot \sqrt{p} = p \in \mathbb{Q}$.

2.16. Feladat. *Igazolja, hogy bármely két különböző valós szám között van racionális szám.*

Megoldás. Legyenek $x < y$ tetszőleges valós számok. Három esetre bontjuk a lehetőségeket:

(a) $x < 0 < y$. A 0 racionális szám, így találtunk az állításnak megfelelő racionális számot.

(b) $0 \leq x < y$. Az archimedeszi tulajdonság miatt létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, melyre $n \cdot (y - x) > 1$, azaz $nx + 1 < ny$. Legyen

$$N := \sup\{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n \cdot x\}.$$

Ez az elem létezik és véges, mivel egy nem üres halmaz szuprémuma. Nyilván létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, melyre $N - 1 < m \leq N \leq nx$. Ezért $N < m + 1$, tehát

$$n \cdot x < m + 1 \leq n \cdot x + 1 < ny,$$

ezért $x < \dfrac{m+1}{n} < y$, így találtunk x és y között racionális számot.

(c) $x < y \leq 0$. Ekkor $0 \leq -y < -x$, így a (b) rész alapján van olyan $r \in \mathbb{Q}$, melyre $-y < r < -x$, melyből kapjuk, hogy $x < -r < y$, és $-r$ a 2.12. feladat alapján racionális.

2.17. Feladat. *Igazolja, hogy bármely két különböző valós szám között van irracionális szám.*

Megoldás. Ha $x < y$, akkor $\dfrac{x}{\sqrt{2}} < \dfrac{y}{\sqrt{2}}$, így a 2.16. feladat miatt létezik olyan $r \neq 0$ racionális szám, melyre $\dfrac{x}{\sqrt{2}} < r < \dfrac{y}{\sqrt{2}}$, tehát $x < \sqrt{2}r < b$. Ha $q = \sqrt{2}r$ racionális volna, akkor a $\sqrt{2} = \dfrac{q}{r}$ szám is racionális volna, mely a 2.13. feladat megoldása alapján nem igaz.

2.18. Feladat. *Legyen $x, y \in \mathbb{R}$ és $n, m \in \mathbb{N}$. Bizonyítsa be, hogy*

1. $x^n x^m = x^{n+m}$,
2. $(xy)^n = x^n y^n$,
3. $(x^n)^m = x^{nm}$,
4. *ha* $y \neq 0$, *akkor* $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$,
5. *ha* $x \neq 0$, *akkor* $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$.

Megoldás.

1. Legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzített. $x^1 x^m = xx^m = x^{m+1}$, így $n = 1$ esetén teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra már beláttuk az állítást. Ezt felhasználva $x^{k+1}x^m = xx^k x^m = xx^{k+m} = x^{k+m+1}$, így $k + 1$-re is igaz az állítás, így a teljes indukció elve alapján az egyenlőség igaz minden n-re. Mivel m tetszőleges volt, az állítás igaz.
2. Mivel $(xy)^1 = xy = x^1 y^1$, így $n = 1$ esetén teljesül az egyenlőség. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz az állítás. Ekkor $(xy)^{k+1} = xy(xy)^k = xy(x^k y^k) = (xx^k)(yy^k) = x^{k+1}y^{k+1}$, tehát $n = k + 1$-re is teljesül az állítás.

3. Legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzített. Az állítás $n = 1$ esetén teljesül, ugyanis $(x^1)^m = x^m = x^{1\cdot m}$. Tegyük fel, hogy valamely $n = k$ esetén igaz az egyenlőség. Az előző két pontot felhasználva $(x^{k+1})^m = (xx^k)^m = x^m(x^k)^m = x^m x^{km} = x^{(k+1)m}$, így $n = k + 1$-re is igaz az állítás.
4. $n = 1$ esetén az állítás teljesül, hiszen $\left(\frac{x}{y}\right)^1 = \frac{x}{y} = \frac{x^1}{y^1}$. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra is igaz az egyenlőség. Ezt felhasználva
$$\left(\frac{x}{y}\right)^{k+1} = \frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^k = \frac{x}{y}\cdot\frac{x^k}{y^k} = \frac{xx^k}{yy^k} = \frac{x^{k+1}}{y^{k+1}},$$
tehát az állítás $n = k + 1$-re is igaz.
5. Legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzített. $n = 1$ esetén az állítás teljesül, hiszen
$$\frac{x}{x^m} = \frac{x}{x \cdot x^{m-1}} = \frac{x}{x}\cdot\frac{1}{x^{m-1}} = 1 \cdot x^{m-1} = x^{m-1}.$$
Tegyük fel, hogy $n = k$-ra is igaz az egyenlőség. Ezt felhasználva
$$\frac{x^{k+1}}{x^m} = x\frac{x^k}{x^m} = xx^{k-m}.$$
Négy esetre bontva vizsgálódunk tovább. Ha $k-m \in \mathbb{N}$, akkor a feladat első része miatt $xx^{k-m} = x^{k+1-m}$. Ha $k-m = 0$, akkor $xx^{k-m} = x\cdot 1 = x^1 = x^{k+1-m}$. Ha $m - k = 1$, akkor
$$xx^{k-m} = x\frac{1}{x} = 1 = x^0 = x^{k+1-m}.$$
Végezetül, ha $m - k \in \mathbb{N}$ és $m - k \neq 1$, akkor a feladat 1. és 4. része miatt
$$xx^{k-m} = \frac{x}{x^{m-k}} = \frac{x}{x \cdot x^{m-k-1}} = \frac{1}{x^{m-k-1}} = x^{k+1-m}.$$
Ezekből adódik, hogy az állítás igaz $n = k + 1$-re is.

2.19. Feladat. *Legyen $x, y \in \mathbb{R}$ és $n, m \in \mathbb{Z}$. Bizonyítsa be, hogy*

1. $x^n x^m = x^{n+m}$,
2. $(xy)^n = x^n y^n$,
3. $(x^n)^m = x^{nm}$,
4. *ha $y \neq 0$, akkor* $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$.

Megoldás.

1. Legyen $n, m \in \mathbb{Z}$. Ekkor négy eset lehetséges:
   (a) $n, m \in \mathbb{N}$. Ekkor az előző rész alapján igaz az állítás.

(b) $n \in \mathbb{N}$ és $m = 0$, vagy $m \in \mathbb{N}$ és $n = 0$, vagy $n = m = 0$. Az első esetben $x^n x^0 = x^n \cdot 1 = x^n = x^{n+0}$, tehát igaz az állítás. A második eset hasonlóan igazolható, a harmadik esetben pedig nyilvánvalóan teljesül az egyenlőség.

(c) $n \in \mathbb{N}$ és $-m \in \mathbb{N}$ vagy $-n \in \mathbb{N}$ és $m \in \mathbb{N}$. Az első esetet látjuk be. Ha $n + m \in \mathbb{N}$, akkor a 2.18 feladat 5. része alapján

$$x^n x^m = x^n x^{-(-m)} = x^n \frac{1}{x^{-m}} = \frac{x^n}{x^{-m}} = x^{n-(-m)} = x^{n+m}.$$

Ha $n = -m$, akkor $x^{n+m} = x^0 = 1 = \dfrac{x^n}{x^{-m}} = x^n x^m$.

Ha $-(n + m) \in \mathbb{N}$, akkor

$$x^n x^m = x^n \frac{1}{x^{-m}} = \frac{1}{\frac{x^{-m}}{x^n}} = \frac{1}{x^{-m-n}} = x^{n+m}.$$

(d) $-n \in \mathbb{N}$ és $-m \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$x^n x^m = \frac{1}{x^{-n} x^{-m}} = \frac{1}{x^{-(n+m)}} = x^{n+m}.$$

2. Legyen $n \in \mathbb{Z}$. Három eset lehetséges.
(a) $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az előző feladat alapján teljesül az állítás.
(b) $n = 0$. Ebben az esetben az állítás nyilván teljesül.
(c) $-n \in \mathbb{N}$. A 2.18. feladat 2. és 4. része alapján

$$\begin{aligned}(xy)^n &= (xy)^{-(-n)} = \frac{1}{(xy)^{-n}} = \left(\frac{1}{xy}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} \left(\frac{1}{y}\right)^{-n} \\ &= \frac{1}{x^{-n}} \frac{1}{y^{-n}} = x^{-(-n)} y^{-(-n)} = x^n y^n.\end{aligned}$$

3. A feladat első részénél tárgyalt esetekre szétválasztva végezhető a bizonyítás.
4. A feladat második részénél tárgyalt esetekre szétválasztva végezhető a bizonyítás.

2.20. Feladat. *Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq 0, b \geq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{Z}$. Bizonyítsa be, hogy ekkor*

1. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$,
2. *$y \neq 0$ esetén* $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$,
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$,
4. *$x \neq 0$ esetén* $\sqrt[n]{x^k} = (\sqrt[n]{x})^k$.

Megoldás.

1. A 2.18 feladat 2. része alapján $\left(\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}\right)^n = (\sqrt[n]{x})^n \left(\sqrt[n]{y}\right)^n = xy$. Felhasználva, hogy egy nem negatív számnak egyértelműen létezik nem negatív k-adik gyöke ($k \in \mathbb{N}$), n-edik gyök vonása után kapjuk, hogy $\sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.
2. A 2.18 feladat 4. része alapján $\left(\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)^n = \dfrac{(\sqrt[n]{x})^n}{\left(\sqrt[n]{y}\right)^n} = \dfrac{x}{y}$, melyből n-edik gyök vonása után adódik az állítás.
3. A 2.18 feladat 3. része alapján $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}\right)^{mn} = \left(\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}\right)^m\right)^n = (\sqrt[n]{x})^n$ $= x$, melyből $m \cdot n$-edik gyök vonása után adódik az állítás.
4. A 2.18 feladat 3. része alapján $\left((\sqrt[n]{x})^k\right)^n = (\sqrt[n]{x})^{kn} = \left((\sqrt[n]{x})^n\right)^k = x^k$, melyből n-edik gyök vonása után adódik az állítás.

2.21. Feladat. *Legyenek $k, j \in \mathbb{Z}$ és $n, m \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\dfrac{k}{n} = \dfrac{j}{m}$. Igazolja, hogy ekkor $\sqrt[n]{x^k} = \sqrt[m]{x^j}$ minden $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ esetén.*

Megoldás. A feltételek alapján $km = jn$, így a 2.19. feladatot felhasználva

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{x^k}\right)^{nm} &= \left(\left(\sqrt[n]{x^k}\right)^n\right)^m = (x^k)^m = x^{km}\\ &= x^{jn} = (x^j)^n = \left(\left(\sqrt[m]{x^j}\right)^m\right)^n = \left(\sqrt[m]{x^j}\right)^{nm}.\end{aligned}$$

Felhasználva, hogy egy nem negatív számnak egyértelműen létezik nem negatív k-adik gyöke ($k \in \mathbb{N}$), $n \cdot m$-edik gyököt vonva kapjuk az állítást.

2.22. Feladat. *Legyen $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y > 0$ és $p, q \in \mathbb{Q}$. Mutassa meg, hogy*

1. $x^p x^q = x^{p+q}$,
2. $\dfrac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$,
3. $(xy)^p = x^p y^p$,
4. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^p = \dfrac{x^p}{y^p}$,
5. $(x^p)^q = x^{pq}$.

Megoldás.

Legyen $p = \dfrac{k}{n}$, $q = \dfrac{j}{m}$, ahol $n, m \in \mathbb{N}$ és $k, j \in \mathbb{Z}$. A 2.19., a 2.20. és 2.21. feladatokat használjuk az átalakításokban.

1. $x^{p+q} = x^{\frac{km+jn}{nm}} = \sqrt[nm]{x^{km+jn}} = \sqrt[nm]{x^{km}}\,\sqrt[nm]{x^{jn}} = \sqrt[n]{x^k}\,\sqrt[m]{x^j} = x^p x^q$.
2. $x^{p-q} = x^{\frac{km-jn}{nm}} = \sqrt[nm]{x^{km-jn}} = \sqrt[nm]{\dfrac{x^{km}}{x^{jn}}} = \dfrac{\sqrt[nm]{x^{km}}}{\sqrt[nm]{x^{jn}}} = \dfrac{\sqrt[n]{x^k}}{\sqrt[m]{x^{-j}}} = \dfrac{x^p}{x^q}$.

3. $(xy)^p = \sqrt[n]{(xy)^k} = \sqrt[n]{x^k y^k} = \sqrt[n]{x^k}\sqrt[n]{y^k} = x^p y^p$.
4. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^p = \sqrt[n]{\left(\dfrac{x}{y}\right)^k} = \sqrt[n]{\dfrac{x^k}{y^k}} = \dfrac{\sqrt[n]{x^k}}{\sqrt[n]{y^k}} = \dfrac{x^p}{y^p}$.
5. $((x)^p)^q = \sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{x^k}\right)^j} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{(x^k)^j}} = \sqrt[nm]{x^{kj}} = x^{pq}$.

2.23. Feladat. *Bizonyítsa be teljes indukcióval, hogy minden n természetes szám esetén igazak a következők:*

1. $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,
2. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
3. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$,
4. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$,
5. $2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + (n+1)2^n = 2^{n+1}n$,
6. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$,
7. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$,
8. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$,
9. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$,
10. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$,
11. $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$,
12. $(1+1)\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) \cdots \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = n + 1$,
13. $\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

Megoldás.

1. Az állítás $n = 1$ esetén teljesül, hiszen $1 = 1$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n = k$ számra, azaz

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ezt felhasználva, $n = k+1$ esetén

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+k+(k+1) &= (1+2+\cdots+k)+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned}$$

tehát az állítás igaz $n = k+1$-re is. Így a teljes indukció elve alapján az állítás minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül.

2. Az állítás $n = 1$ esetén teljesül, hiszen $1 = 1$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n = k$ számra, azaz

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Ezt felhasználva, $n = k+1$ esetén

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{6(k+1)^2}{6} \\ = \frac{(k+6(k+1))(2k+1)(k+1)}{6} &= \frac{(14k^2+19k+6)(k+1)}{6} \\ = \frac{(k+2)(2k+3)(k+1)}{6} &= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}, \end{aligned}$$

mely éppen az állítás $n = k+1$-re.

3. Az állítás $n = 1$ esetén teljesül, hiszen $1 = 1$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n = k$ számra, azaz

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Ezt felhasználva, $n = k+1$ esetén

$$\begin{aligned} 1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+\frac{4(k+1)^3}{4} \\ = \frac{(k^2+4(k+1))(k+1)^2}{4} &= \frac{(k^2+4k+1)(k+1)^2}{4} \\ = \frac{(k+2)^2(k+1)^2}{4} &= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

mely éppen az állítás $n = k+1$-re.

4. Az állítás $n = 1$ esetén teljesül, hiszen $1 = 1$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n = k$ számra, azaz

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1.$$

Ezt felhasználva, $n = k + 1$ esetén

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k = (2^k - 1) + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

mely éppen az állítás $n = k + 1$-re.

5. Az állítás $n = 1$ esetén teljesül, hiszen $4 = 4$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n = k$ számra, azaz

$$2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + (k + 1)2^k = 2^{k+1}k.$$

Ezt felhasználva, $n = k + 1$ esetén

$$\begin{aligned}&2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + (k + 1)2^k + (k + 2)2^{k+1} = 2^{k+1}k + 2^{k+1}(k + 2)\\ &= 2^{k+1}(2k + 2) = 2^{k+1} \cdot 2(k + 1), = 2^{k+2}(k + 1),\end{aligned}$$

mely éppen az állítás $n = k + 1$-re.

6. Az állítás $n = 1$ esetén teljesül, hiszen $1 = 1$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n = k$ számra, azaz

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

Ezt felhasználva, $n = k + 1$ esetén

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2,$$

mely éppen az állítás $n = k + 1$-re.

7. Az állítás $n = 1$ esetén teljesül, hiszen $2 = 2$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n = k$ számra, azaz

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k + 1) = \frac{k(k + 1)(k + 2)}{3}.$$

Ezt felhasználva, $n = k + 1$ esetén

$$\begin{aligned}&1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k + 1) + (k + 1)(k + 2)\\ = \ &\frac{k(k + 1)(k + 2)}{3} + \frac{3(k + 1)(k + 2)}{3} = \frac{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{3}\end{aligned}$$

mely éppen az állítás $n = k + 1$-re.

8. Az állítás $n = 1$ esetén teljesül, hiszen $6 = 6$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n = k$ számra, azaz

$$1 \cdot 2 \cdot +2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + k(k + 1)(k + 2) = \frac{k(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{4}.$$

Ezt felhasználva, $n = k + 1$ esetén

$$\begin{aligned}
&1 \cdot 2 \cdot +2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) \\
= \quad & \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + \frac{4(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \\
= \quad & \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}
\end{aligned}$$

mely éppen az állítás $n = k + 1$-re.

9. Az állítás $n = 1$ esetén teljesül, hiszen $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n = k$ számra, azaz

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Ezt felhasználva, $n = k + 1$ esetén

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$= \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)},$$

mely éppen az állítás $n = k + 1$-re.

10. Az állítás $n = 1$ esetén teljesül, hiszen $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n = k$ számra, azaz

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}.$$

Ezt felhasználva, $n = k + 1$ esetén

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}$$
$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(2k+3)}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1},$$

mely éppen az állítás $n = k + 1$-re.

11. Az állítás $n = 1$ esetén teljesül, hiszen $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n = k$ számra, azaz

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1}.$$

Ezt felhasználva, $n = k + 1$ esetén

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)-2)(3(k+1)+1)} \\
&= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k(3k+4)}{(3k+1)(3k+4)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} \\
&= \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3(k+1)+1},
\end{aligned}$$

mely éppen az állítás $n = k + 1$-re.

12. Az állítás $n = 1$ esetén teljesül, hiszen $2 = 2$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n = k$ számra, azaz

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{k}\right) = k+1.$$

Ezt felhasználva, $n = k + 1$ esetén

$$\begin{aligned}
(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) &= (k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) \\
&= (k+1)+1 = k+2
\end{aligned}$$

mely éppen az állítás $n = k + 1$-re.

13. Az állítás $n = 1$ esetén teljesül, hiszen $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n = k$ számra, azaz

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)}.$$

Ezt felhasználva, $n = k + 1$ esetén

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right) \\
= \;& \frac{k+2}{2(k+1)}\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)} \\
= \;& \frac{(k+2)^2-1}{2(k+1)(k+2)} = \frac{(k+3)(k+1)}{2(k+1)(k+2)} = \frac{k+3}{2(k+2)},
\end{aligned}$$

mely éppen az állítás $n = k + 1$-re.

2.24. Feladat. *Bizonyítsa be teljes indukcióval, hogy minden n természetes szám esetén igazak a következők:*

1. *ha $h > -1$, akkor $(1 + h)^n \geq 1 + nh$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $n = 1$ vagy $x = 0$ (Bernoulli egyenlőtlenség),*

2. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)^2}>1$,

3. $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$,

4. $\dfrac{n+1}{2}<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$,

5. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n+1}-1}<n+1$.

Megoldás.

1. Az állítás $n=1$ esetén teljesül, ugyanis $1+h\geq 1+h$. Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség fennáll valamely $n=k$ estén, azaz
$$(1+h)^k\geq 1+kh.$$
Ezt felhasználva, a 2.7. feladat alapján $n=k+1$-re kapjuk, hogy
$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1} &= (1+h)^k(1+h)\geq(1+kh)(1+h)=1+kh+h+kh^2\\ &= 1+(k+1)h+kh^2\geq 1+(k+1)h.\end{aligned}$$
A teljes indukció elve alapján tehát az állítás minden természetes számra teljesül. A bizonyítás menetéből adódik az egyenlőségre vonatkozó állítás is.

2. $n=1$ esetén teljesül az állítás, ugyanis $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{12}>1$. Tegyük fel, hogy igaz az egyenlőtlenség valamely $n=k$ esetén, azaz
$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}>1.$$
Ennek segítségével $n=k+1$ esetén kapjuk, hogy
$$\begin{aligned}&\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{((k+1)+1)^2}\\ &=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{(k+2)^2}\\ &=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+2)^2}-\frac{1}{k+1}\\ &>1+\frac{1}{(k+1)^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+2)^2}-\frac{1}{k+1}\\ &\geq 1+\frac{2k+3}{(k+2)^2}-\frac{1}{k+1}=1+\frac{(2k+3)(k+1)-(k+2)^2}{(k+2)^2(k+1)}\\ &=1+\frac{k^2+k-1}{(k+2)^2(k+1)}>1,\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy az $\dfrac{1}{(k+1)^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{(k+2)^2}$ kifejezés $(k+2)^2-(k+1)^2=2k+3$ darab tagból áll, és minden tag nagyobb, vagy egyenlő, mint $\dfrac{1}{(k+2)^2}$.

3. Az állítás $n=1$-re igaz, hiszen $1\geq 1$. Tegyük fel, hogy fennáll az egyenlőtlenség valamely $n=k$ esetén, tehát
$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}\geq\sqrt{k}.$$
Ennek alapján $n=k+1$-re
$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\geq\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\\&=\frac{\sqrt{k}\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}}\geq\frac{\sqrt{k}\sqrt{k}+1}{\sqrt{k+1}}=\frac{k+1}{\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}.\end{aligned}$$

4. Az állítás $n=1$ esetén nyilvánvalóan teljesül, ugyanis $1<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}$. Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség igaz $n=k$ esetén, tehát
$$\frac{k+1}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}.$$
Ekkor $n=k+1$-re
$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+2}-1}\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}+\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{k+2}-1}\\&>\frac{k+1}{2}+\frac{2^{k+1}}{2^{k+2}}=\frac{k+1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{k}{2},\end{aligned}$$
ahol felhasználtuk, hogy az $\dfrac{1}{2^{k+1}}+\cdots+\dfrac{1}{2^{k+2}-1}$ kifejezés $2^{k+2}-1-(2^{k+1}-1)=2^{k+1}$ darab tagból áll, és minden tag nagyobb, mint $\dfrac{1}{2^{k+2}}$.

5. Az állítás $n=1$ esetén teljesül, hiszen $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{6}<2$. Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség igaz $n=k$ esetén, tehát
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}<k+1.$$

Ekkor $n = k + 1$-re

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+2} - 1} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1} - 1} + \frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+2} - 1} \\
&< k + 1 + \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}} = k + 1 + 1 = k + 2,
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy az $\frac{1}{2^{k+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+2} - 1}$ kifejezés 2^{k+1} darab tagból áll, és minden tag kisebb, vagy egyenlő mint $\frac{1}{2^{k+1}}$.

2.25. Feladat. *Igazolja, hogy ha $x_1, \ldots, x_n$ pozitív valós számok, akkor teljesül a számtani és mértani közép közötti összefüggés:*

$$A_n := \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq G_n := \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

továbbá egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Megoldás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Az állítás $n = 1$-re teljesül, hiszen $A_1 = x_1 = x_1 = G_1$. Tegyük fel, hogy valamely $n = k$ esetén fennáll az egyenlőtlenség: $A_k \geq G_k$ és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_k$. Ekkor $n = k+1$ esetén a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
A_{k+1} &= \frac{1}{k+1}(kA_k + x_{k+1}) = A_k \left(\frac{k}{k+1} + \frac{x_{k+1}}{(k+1) \cdot A_k} \right) \\
&= A_k \left(1 + \left(\frac{x_{k+1}}{(k+1)A_k} - \frac{1}{k+1} \right) \right).
\end{aligned}$$

$\frac{x_{k+1}}{(k+1)A_k} > 0$, így $\frac{x_{k+1}}{(k+1)A_k} - \frac{1}{k+1} > -1$, tehát alkalmazva a Bernoulli-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
A_{k+1}^{k+1} &= (A_k)^{k+1} \left(1 + \left(\frac{x_{k+1}}{(k+1)A_k} - \frac{1}{k+1} \right) \right)^{k+1} \\
&\geq (A_k)^{k+1} \left(1 + (k+1) \left(\frac{x_{k+1}}{(k+1)A_k} - \frac{1}{k+1} \right) \right) \\
&= (A_k)^{k+1} \frac{x_{k+1}}{A_k} = A_k^k \cdot x_{k+1},
\end{aligned}$$

ahol egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\frac{x_{k+1}}{(k+1)A_k} - \frac{1}{k+1} = 0$, azaz ha $x_{k+1} = A_k$. Tehát, az indukciós feltevést felhasználva

$$A_{k+1}^{k+1} \geq A_k^k \cdot x_{k+1} \geq G_k^k \cdot x_{k+1} = x_1 \cdots x_k \cdot x_{k+1} = G_{k+1}^{k+1},$$

melyből kapjuk, hogy $A_{k+1} \geq G_{k+1}$, és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1 = \cdots = x_k$ és $x_{k+1} = A_k$, azaz ha $x_1 = \cdots = x_k = x_{k+1}$.

2.26. Feladat. *Igazolja, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív valós számok és $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, akkor $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.*

Megoldás. A feladat az előző feladat következménye. Ugyanis

$$A_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = 1,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, így n-nel való szorzás után kapjuk az állítást.

2.27. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív valós számok, akkor*

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Megoldás. Mivel $\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \cdots \cdot \frac{x_n}{x_1} = 1$, így alkalmazva az előző feladatot az $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_3}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}$ számokra kapjuk az állítást.

2.28. Feladat. *Igazolja, hogy tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ esetén*

(a) $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$ *(Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenség),*

(b) $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$ *(Minkowski-egyenlőtlenség).*

Megoldás.

(a) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sum_{i=1}^n (x_i t + y_i)^2$. Nyilván minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $f(t) \geq 0$, továbbá

$$f(t) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) t^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) t + \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Ha $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, akkor az állítás nyilván teljesül. Legyen $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$. Bevezetve az $a = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $b = 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ és $c = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$ jelöléseket adódik, hogy az $f(t) = at^2 + bt + c$ másodfokú, pozitív főegyütthatójú függvény akkor és csak akkor nem negatív minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, ha a diszkriminánsa nem pozitív, tehát $b^2 - 4ac \leq 0$, azaz

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \leq 0.$$

A fenti egyenlőtlenséget átrendezve, és 4-el egyszerűsítve kapjuk az állítást.

(b) A feladat (a) részéből kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)x_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}$$

illetve

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)y_i \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}.$$

A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2\right)}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i}\right),$$

melyből a $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2}$ kifejezéssel való osztással kapjuk az állítást.

3. Komplex számok

2.29. Feladat. *Adja meg az alábbi komplex számok valós illetve képzetes részét:* $0, 6, -6i, 4 + 3i, 5 - 7i, -4 - i$.

Megoldás. Egy $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ komplex szám valós része $\mathrm{Re}(z) = a$, illetve képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$. Így a fenti számok valós része rendre $0, 6, 0, 4, 5, -4$, képzetes része $0, 0, -6, 3, -7, -1$.

2.30. Feladat. *Hozza algebrai alakra az alábbi komplex számokra vonatkozó kifejezéseket:*

1. $(4 + 12i) + (7 - 6i) + 12$,

2. $(13-8i)(5+6i)i$,
3. i^4k, i^{4k+1}, i^{4k+2} *és* i^{4k+3}, *ahol* $k \in \mathbb{Z}$,
4. $(5+4i)(7-3i)+i^{102}$.

Megoldás.

1. $(4+12i)+(7-6i)+12 = 4+7+12+12i-6i = 23+6i$.
2. $(13-8i)(5+6i)i = (65+78i-40i-48i^2)i = (65+38i+48)i = (113+38i)i = 113i+38i^2 = -38+113i$.
3. $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 i = -i$, $i^4 = i^3 i = -i^2 = 1$, $i^5 = i^4 i = i$, stb. Tehát i hatványai ciklikusan ismétlődnek, azon hatványok, amelyek oszthatóak 4-gyel, 1-gyel lesznek egyenlőek. Így $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i^{4k} i = i$, $i^{4k+2} = -1$ és végül $i^{4k+3} = -i$ minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén.
4. Az előző rész alapján $i^{102} = -1$. Tehát $(5+4i)(7-3i)+i^{102} = (35-15i+28i-12i^2)-1 = 35+12+13i-1 = 46+13i$.

2.31. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy minden* $z, w \in \mathbb{C}$ *esetén*

1. $\overline{z+w} = \overline{z}\overline{w}$,
2. $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$,
3. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$,
4. $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$,
5. $z\overline{z} \geq 0$ *és* $z\overline{z} = 0$ *pontosan akkor, ha* $z = 0$.
6. $z = \overline{z}$ *akkor és csak akkor, ha* $z \in \mathbb{R}$.
7. $z = \overline{z}$ *akkor és csak akkor ha* $\mathrm{Re}(z) = 0$, *azaz ha* z *tisztán képzetes.*

Megoldás.

Legyen $z = a+bi$ és $w = c+di$ ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. $\overline{z+w} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i = (a-bi)+(c-di) = \overline{z}+\overline{w}$.
2. $\overline{zw} = \overline{(ac-bd)+(bc+ad)i} = (ac-bd)-(bc+ad)i = (a-bi)(c-di) = \overline{z}\overline{w}$.
3. $z+\overline{z} = a+bi+(a-bi) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$.
4. $z-\overline{z} = a+bi-(a-bi) = 2bi = 2i\,\mathrm{Im}(z)$.
5. $z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-abi+abi-bi^2 = a^2+b^2 \geq 0$, és $= 0$ akkor és csak akkor, ha $a = b = 0$, azaz ha $z = 0$.
6. $z = \overline{z} \iff a+bi = a-bi \iff 2bi = 0 \iff b = 0 \iff z$ valós.
7. $z = -\overline{z} \iff a+bi = -(a-bi) \iff a+bi = -a-bi \iff 2a = 0 \iff a = 0 \iff z$ tisztán képzetes.

2.32. Feladat. *Adja meg a következő kifejezések értékét algebrai alakban:*

$(a)\quad (3-2i)(3+2i), \quad (b)\quad \dfrac{4+3i}{5-i}, \quad (c)\quad \dfrac{i}{2+8i}, \quad (d)\quad \overline{(5+4i)}\cdot\dfrac{2+i}{1-i}.$

Megoldás.

(a) $(3-2i)(3+2i) = 9+6i-6i-4i^2 = 9+4 = 13$. Azonnal látható a megoldás, hiszen az összeszorzott számok egymás konjugáltjai. (Ha $z = a+bi$, akkor $z\overline{z} = a^2+b^2$.)

(b) Komplex számmal való osztás a konjugálttal történő bővítéssel végezhető el. Tehát

$$\begin{aligned}\frac{4+3i}{5-i} &= \frac{4+3i}{5-i}\cdot\frac{5+i}{5+i} = \frac{(4+3i)(5+i)}{5^2+(-1)^2} = \frac{20+5i+15i+3i^2}{26}\\ &= \frac{17+20i}{26} = \frac{17}{26}+\frac{10}{13}i,\end{aligned}$$

mely már algebrai alak.

(c) $\dfrac{i}{2+8i} = \dfrac{i}{2+8i}\cdot\dfrac{2-8i}{2-8i} = \dfrac{i(2-8i)}{2^2+8^2} = \dfrac{8+2i}{68} = \dfrac{2}{17}+\dfrac{1}{34}i.$

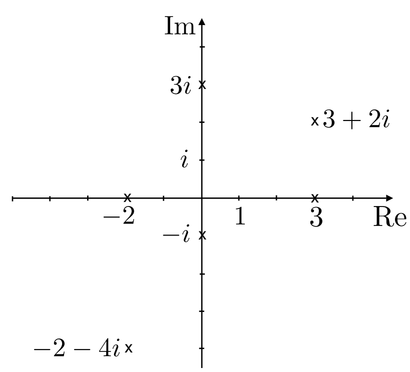
(d) $\overline{(5+4i)}\cdot\dfrac{2+i}{1-i} = (5-4i)\dfrac{2+i}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i} = \dfrac{(5-4i)(2+2i+i+i^2)}{1^2+(-1)^2} =$
$\dfrac{(5-4i)(1+3i)}{2} = \dfrac{5+15i-4i-12i^2}{2} = \dfrac{17+11i}{2} = \dfrac{17}{2}+\dfrac{11}{2}i.$

2.33. Feladat. *Határozza meg az alábbi komplex számok abszolút értékét:* $0, 3, -5, 5i, -3i, 2i+4, \sqrt{2}+\sqrt{2}i, 1-i$.

Megoldás. A $z = a+bi$ komplex szám abszolút értéke $|z| = z\overline{z} = \sqrt{a^2+b^2}$, így a megoldások rendre $0, 3, 5, 5, 3, 2\sqrt{5}, 2, \sqrt{2}$.

2.34. Feladat. *Ábrázolja a komplex számsíkon a következő komplex számokat:* 3, -2, $-i$, $4i$, $3+2i$, $-2-4i$.

Megoldás.

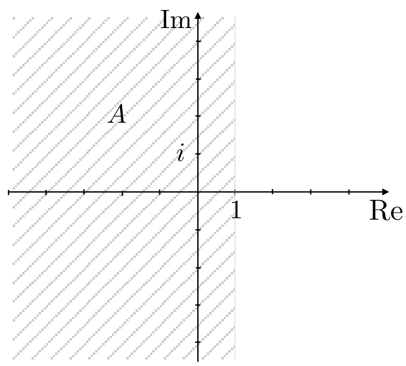


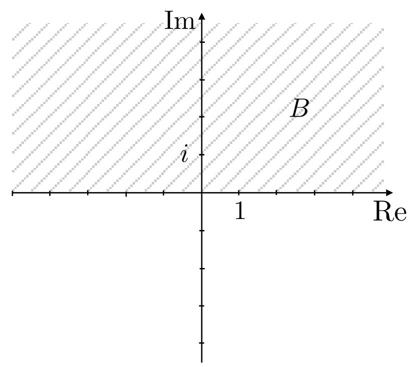
2.35. Feladat. *Ábrázolja a komplex számsíkon a következő halmazokat:*

1. $A = \{z : \mathrm{Re}(z) \le 1\}$,

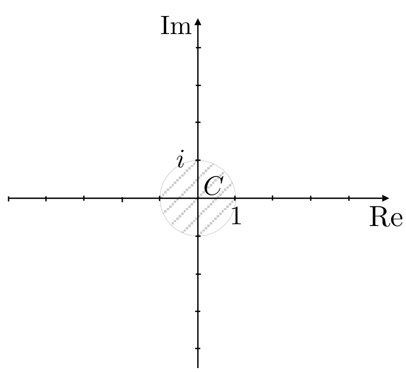
2. $B = \{z : Im(z) > 0\}$,
3. $C = \{z : |z| \leq 1\}$,
4. $D = \left\{z : \left|\dfrac{1}{z}\right| \leq 1\right\}$,
5. $E = \left\{z : \dfrac{1}{|z-i|} > 1\right\}$,
6. $F = \{z : \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 1\}$,
7. $G = \{z : |z-1| \leq |z+2|\}$,
8. $H = \{z : 6 \leq |6 - 3i - 3z| \leq 9\}$.

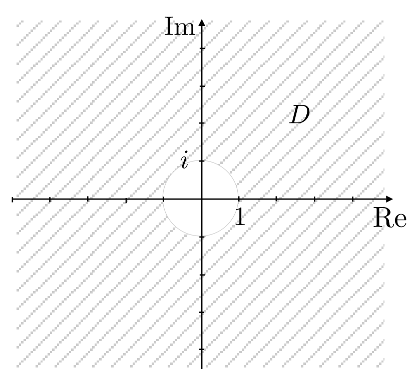
Megoldás. Az A és B halmazok a komplex számsik két félsikját alkotják:



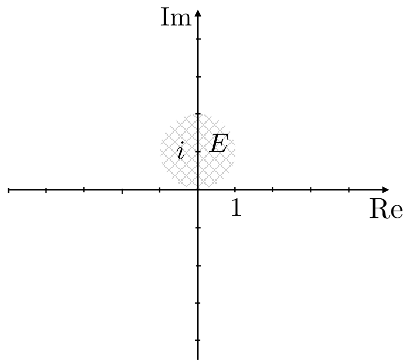


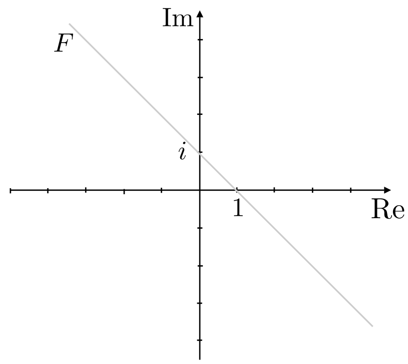
A C halmaz elemei azon komplex számok, melyek abszolút értéke ≤ 1, azaz melyeknek az origótól való távolsága nem nagyobb, mint 1. Ezek a pontok az egység sugarú, origó középpontú körön és annak belsejében helyezkednek el. A D halmaz elemei pedig éppen a kör és a rajta kívül eső pontok:



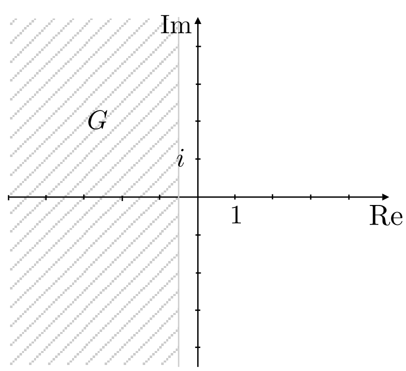


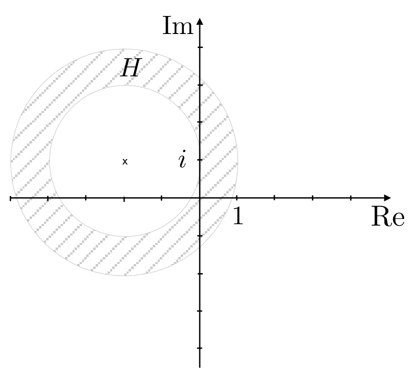
Az E halmaz azon z komplex számokból áll, melyekre $|z-i|<1$, tehát melyeknek a távolsága az i számtól egynél kisebb. Ezek éppen a $(0,1)$ középpontú, 1 sugarú kör belsejében helyezkednek el. Az F halmaz elemei a $(0,1)$ és $(1,0)$ ponton átmenő egyenes pontjai:





A G halmaz elemei azon komplex számok, melyek közelebb vannak a -2-höz, mint az 1-hez. Ezek nyilván azok a komplex számok, melyek valós része nem nagyobb, mint $\frac{1+(-2)}{2}=-\dfrac{1}{2}$. Végül, ha $z\in H$, akkor $2\le|z-(-2+i)|\le 3$, tehát z távolsága a $-2+i$ komplex számtól nem kisebb, mint 2 de nem nagyobb, mint 3. Ezek éppen a $-2+i$ középpontú 2 illetve 3 sugarú körök és az általuk meghatározott körgyűrű pontjai.





2.36. Feladat. *Írja át trigonometrikus alakba az alábbi komplex számokat:*

(a) 5, (b) -2, (c) $4i$, (d) $-6i$,

(e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$, (f) $-2+2i$, (g) $1-\sqrt{3}i$, (h) $-2\sqrt{3}-2i$.

Megoldás. A z komplex szám trigonometrikus alakja $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ahol φ a komplex szám valós tengellyel bezárt szöge vagy argumentuma. Jele $\arg(z)$.

Ha $z = a + bi$, akkor $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. A szög kiszámításához a következő módszer ajánlott: $\mathrm{Im}(z) = b \geq 0$ esetén a $\cos\varphi = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \dfrac{a}{|z|}$ összefüggésből, $b < 0$ esetén pedig a $\cos\varphi_0 = \dfrac{a}{|z|}$ és $\varphi = 2\pi - \varphi_0$ összefüggésből számolhatjuk ki φ értékét. Mindkét esetben a cos függvény argumentumát 0 és π között keressük, ezen az intervallumon pedig a cos függvény egyértelmű.

Megjegyzendő, hogy ha z valós szám, akkor előjelétől függően szöge 0 vagy π, ha pedig z tisztán képzetes, akkor $\mathrm{Im}(z)$ előjelétől függően az argumentuma $\dfrac{\pi}{2}$ illetve $\dfrac{3\pi}{2}$. Mindezek alapján a megoldások a következők:

(a) Az 5 komplex szám valós és pozitív, így argumentuma 0. Továbbá $|5| = 5$, tehát $5 = 5(\cos 0 + i\sin 0)$.

(b) A -2 komplex szám valós és negatív, így argumentuma π. Továbbá $|-2| = 2$, tehát $-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$.

(c) A $4i$ komplex szám tisztán képzetes, $\mathrm{Im}(4i) = 4 > 0$, így argumentuma $\dfrac{\pi}{2}$. Továbbá $|4i| = 4$, tehát $4i = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(d) A $-6i$ komplex szám tisztán képzetes, $\mathrm{Im}(-6i) = -6 < 0$, így argumentuma $\dfrac{3\pi}{2}$. Továbbá $|-6i| = 6$, tehát $-6i = 6\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

(e) Legyen $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$. Ekkor $|z| = \sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}} = 1$. z képzetes része $\dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$, így az argumentumot φ-vel jelölve $\cos\varphi = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, melyből $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Így $z = \left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(f) Legyen $z = -2 + 2i$. Ekkor $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. z képzetes része $2 > 0$, így $\cos\varphi = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, melyből $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Tehát $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

(g) Legyen $z = 1 - \sqrt{3}i$. Ekkor $|z| = \sqrt{1+3} = 2$. z képzetes része $-\sqrt{3} < 0$, így $\varphi = 2\pi - \varphi_0$ ahol $\cos\varphi_0 = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \dfrac{1}{2}$. Ebből adódik, hogy $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{3}$ tehát $\varphi = 2\pi - \varphi_0 = \dfrac{5\pi}{3}$. Így $z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

(h) Legyen $z = -2\sqrt{3} - 2i$. Ekkor $|z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$. z képzetes része $-2 < 0$, így $\varphi = 2\pi - \varphi_0$ ahol $\cos\varphi_0 = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$. Ebből adódik, hogy $\varphi_0 = \dfrac{5\pi}{6}$, ennélfogva $\varphi = 2\pi - \varphi_0 = \dfrac{7\pi}{6}$. Ezért $z = 4\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

2.37. Feladat. *Legyen* $z = 2(\cos 11^\circ + i\sin 11^\circ)$, $w = 3(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ)$. *Határozza meg a* zw, $\dfrac{1}{z}$, $\dfrac{z}{w}$, z^4, w^3, $(zw)^2$ *komplex számokat.*

Megoldás. A trigonometrikus alakban megadott komplex számok műveleti tulajdonságai alapján:

$$\begin{aligned}
zw &= 2\cdot 3(\cos(11^\circ + 35^\circ) + i\sin(11^\circ + 35^\circ)) = 6(\cos 46^\circ + i\sin 46^\circ),\\
\frac{1}{z} &= \frac{1}{2}(\cos(-11^\circ) + i\sin(-11^\circ)) = \frac{1}{2}(\cos 349^\circ + i\sin 349^\circ),\\
\frac{z}{w} &= \frac{2}{3}(\cos(11^\circ - 35^\circ) + i\sin(11^\circ - 35^\circ))\\
&= \frac{2}{3}(\cos(-24^\circ) + i\sin(-24^\circ)) = \frac{2}{3}(\cos 336^\circ + i\sin 336^\circ),\\
z^4 &= 2^4(\cos(4\cdot 11^\circ) + i\sin(4\cdot 11^\circ)) = 16(\cos 44^\circ + i\sin 44^\circ),\\
w^3 &= 3^3(\cos(3\cdot 35^\circ) + i\sin(3\cdot 35^\circ)) = 27(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ),\\
(zw)^2 &= 6^2(\cos(2\cdot 46)^\circ + i\sin(2\cdot 46)^\circ) = 36(\cos 92^\circ + i\sin 92^\circ).
\end{aligned}$$

2.38. Feladat. *Legyen* $z = 64(\cos 80^\circ + i\sin 80^\circ)$. *Határozza meg* z *második, harmadik és negyedik gyökeit.*

Megoldás. Egy komplex számnak pontosan n darab n-edik gyöke van. Ezek abszolút értéke megegyezik, ezért egy origó középpontú körön helyezkednek el. Továbbá bármely két szomszédos gyök egymással $\dfrac{2\pi}{n}$ fokos szöget zár be, így szabályos n-szöget alkotnak.

$$\sqrt{z} = \sqrt{64}\left(\cos\frac{80^\circ + 2k\cdot 180^\circ}{2} + i\sin\frac{80^\circ + 2k\cdot 180^\circ}{2}\right) \quad (k = 0, 1),$$

azaz $\sqrt{z}_1 = 8\,(\cos 40^\circ + i\sin 40)$ és $\sqrt{z}_2 = 8\,(\cos 220^\circ + i\sin 220^\circ)$.

$$\sqrt[3]{z} = 4\left(\cos\frac{80^\circ + 2k\cdot 180^\circ}{3} + i\sin\frac{80^\circ + 2k\cdot 180^\circ}{3}\right) \quad (k = 0, 1, 2),$$

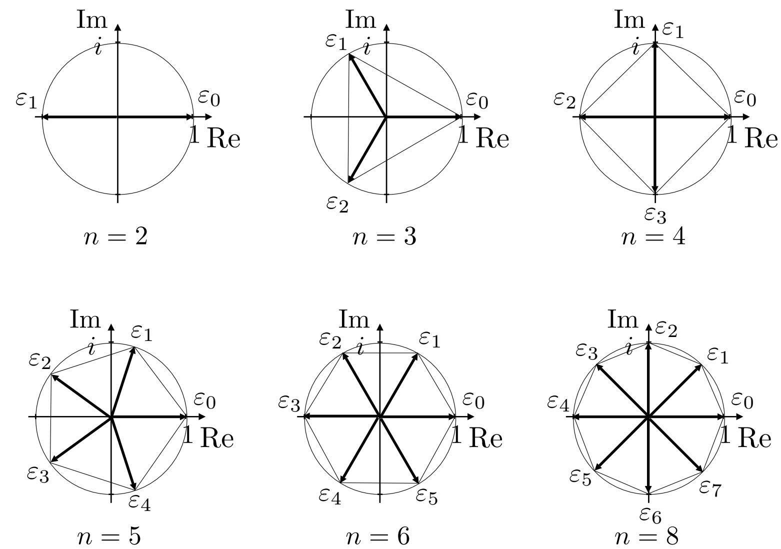
$$\sqrt[4]{z} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{80^\circ + 2k\cdot 180^\circ}{4} + i\sin\frac{80^\circ + 2k\cdot 180^\circ}{4}\right) \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

2.39. Feladat. *Ábrázolja az n-edik egységgyököket $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8$ esetén.*

Megoldás. Az n-edik egységgyökök a következők:

$$\varepsilon_k = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Ezen pontok a komplex számsíkon egy origó középpontú szabályos n szög csúcsaiban helyezkednek el, továbbá $\varepsilon_0 = 1$.



2.40. Feladat. *Legyen adott egy z komplex szám a komplex számsíkon. Állapítsa meg, hogy hogyan helyezkedik el a w komplex szám z-hez képest, ha*

(*a*) $w = 2z$, (*b*) $w = \overline{z}$, (*c*) $w = iz$, (*d*) $w = \dfrac{z}{i}$,

(*e*) $w = (\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}})z$.

Megoldás. Legyen $z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

(a) $w = 2r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, tehát w hossza z hosszának 2-szerese, iránya z-vel megegyezik. A 2-vel való szorzás nyújtást eredményez.

(b) $w = a - bi$, tehát z-nek a képzetes tengelyre való tükrözése.

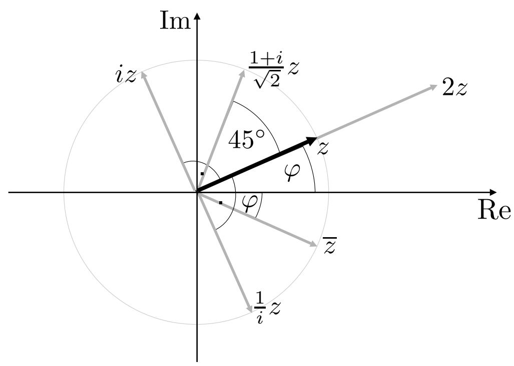
(c) Felhasználva, hogy i trigonometrikus alakja $1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ kapjuk, hogy $w = iz = r\left(cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right)$, így az i-vel való szorzás 90 fokkal való pozitív irányú forgatásnak felel meg.

(d) Felhasználva, hogy $\frac{1}{i}$ trigonometrikus alakja $1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ kapjuk, hogy $w=\frac{z}{i}=r\left(cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right)$, így az i-vel való osztás 90 fokkal való negatív irányú forgatásnak felel meg.

(e) Felhasználva, hogy $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$ trigonometrikus alakja $1\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (lásd 2.36. feladat) kapjuk, hogy

$$w=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}iz=r\left(cos\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

így a $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$-vel való szorzás 45 fokkal való pozitív irányú forgatásnak felel meg.



2.41. Feladat. *Igazolja hogy az*

$$\varepsilon_1=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

egységgyök k-adik hatványai előállítják az összes n-edik egységgyököt, ha $k=0,1,\dots,n-1$.

Megoldás. Nyilvánvaló, hiszen

$$\varepsilon_1^k=\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\quad(k=0,\dots,n-1),$$

valóban előállítja az összes n-edik egységgyököt.

2.42. Feladat. *Igazolja, hogy egy z komplex szám n-edik gyökei előállnak egy gyöke és az n-edik egységgyökök szorzataként.*

Megoldás. Ha w n-edik gyöke z-nek, akkor valamely $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$-re

$$\begin{aligned} w &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \\ &= \underbrace{\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)}_{:=w_1}\underbrace{\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)}_{=\varepsilon_k(=\varepsilon_1^k)}, \end{aligned}$$

ahol w_1 n-edik gyöke z-nek, ε_k pedig n-edik egységgyök.

2.43. Feladat. *Legyenek $w_1, w_2, \dots, w_n$ valamegy z komplex szám n-edik gyökei. Igazolja, hogy ekkor $w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1} = 0$.*

Megoldás. A 2.41. és 2.42. feladatok alapján

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + \dots + w_n &= w_1 + w_1\varepsilon_1 + w_1\varepsilon_1^2 + \dots + w_2\varepsilon_1^{n-1} \\ &= w_1(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_1^{n-1}) = w_1\frac{\varepsilon_1^n - 1}{\varepsilon_1 - 1} \\ &= w_1\frac{1-1}{\varepsilon_1 - 1} = 0. \end{aligned}$$

2.44. Feladat. *Legyen ε és ε_* n-edik egységgyökök.*

(a) Igazolja, hogy ekkor $\varepsilon\varepsilon_*$ és $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_*}$ is n-edik egységgyök.

(b) Előfordulhat-e, hogy $\varepsilon + \varepsilon_*$ illetve $\varepsilon + \varepsilon_*$ is n-edik egységgyök?

Megoldás.

(a) $\varepsilon^n = \varepsilon_*^n = 1$, így $(\varepsilon\varepsilon_*)^n = \varepsilon^n\varepsilon_*^n = 1 \cdot 1 = 1$, tehát $\varepsilon\varepsilon_*$ n-edik egységgyök. Másrészt, $\left(\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_*}\right)^n = \dfrac{\varepsilon^n}{\varepsilon_*^n} = \dfrac{1}{1} = 1$, így $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_*}$ is n-edik egységgyök.

(b) Előfordulhat, például $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ és $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ hatodik egységgyökök, melyek összege 1, mely szintén hatodik egységgyök. Azonban $\varepsilon + \varepsilon_*$ illetve $\varepsilon - \varepsilon_*$ általában már nem n-edik egységgyökök. Például ha $\varepsilon = \varepsilon_* = 1$, akkor $\varepsilon + \varepsilon_* = 2$, $\varepsilon - \varepsilon_* = 0$, melyek nem egységgyökök.

2.45. Feladat. *Oldja meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenleteket:*

1. $z^2 - 2iz - 10 = 0$,
2. $z^2 + (2 + 4i)z + 4i - 2 = 0$,
3. $(-1 - i)z^2 + (1 - 2i)z + 1 = 0$,
4. $z^2 + (1 - i)z + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$,
5. $z\overline{z} + (6i)^2 + 2i = 0$.

Megoldás. Az $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ másodfokú egyenletnek a komplex számok felett mindig két (esetleg megegyező) gyöke van, melyet a

$$z_{1,2} = \frac{-b + \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)_{1,2}}{2a}$$

képlet ad meg. Megjegyzendő, hogy a $b^2 - 4ac$ komplex szám két négyzetgyöke egymásnak -1 szerese, így használható a

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm w}{2a}$$

képlet is, ahol w a $b^2 - 4ac$ komplex szám valamely gyöke.

1. A megoldóképlet alapján

$$z_{1,2} = \frac{2i + \sqrt{(-2i)^2 + 4 \cdot 10}}{2} = \frac{2i + \sqrt{-4 + 40}}{2} = \begin{cases} \frac{2i-6}{2} = i - 3, \\ \frac{2i+6}{2} = i + 3. \end{cases}$$

2. A megoldóképlet alapján

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-2 - 4i + \sqrt{(2+4i)^2 - 4(4i-2)}}{2} \\ &= \frac{-2 - 4i + \sqrt{4 + 16i + (4i)^2 - 16i + 8}}{2} = \frac{-2 - 4i + \sqrt{4 - 16 + 8}}{2} \\ &= \frac{-2 - 4i + \sqrt{-4}}{2} = \begin{cases} \frac{-2-4i-2i}{2} = -1 - 3i, \\ \frac{-2-4i+2i}{2} = -1 - i. \end{cases} \end{aligned}$$

3. A megoldóképlet alapján

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{2i - 1 + \sqrt{(1-2i)^2 - 4(-1-i)}}{-1-i} = \frac{2i - 1 + \sqrt{1 - 4i - 4 + 4 + 4i}}{-1-i} \\ &= \frac{2i - 1 + \sqrt{1}}{-1-i} = \begin{cases} \frac{2i-2}{-1-i} \cdot \frac{-1+i}{-1+i} = \frac{-2i+2i^2+2-2i}{2} = -2i, \\ \frac{2i}{-1-i} \cdot \frac{-1+i}{-1+i} = \frac{-2i+2i^2}{2} = -1 - i. \end{cases} \end{aligned}$$

4. A megoldóképlet alapján

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{i - 1 + \sqrt{(1-i)^2 - 4\frac{\sqrt{3}}{2}}}{2} = \frac{i - 1 + \sqrt{1 - 2i + (-i)^2 - 2\sqrt{3}}}{2} \\ &= \frac{i - 1 + \sqrt{1 - 2i - 1 - 2\sqrt{3}}}{2} = \frac{i - 1 + \sqrt{-2\sqrt{3} - 2i}}{2}. \end{aligned}$$

A 2.36. feladat (h) része alapján a $-2\sqrt{3} - 2i$ komplex szám trigonometrikus alakja $4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6}\right)$. Ennélfogva a két négyzetgyöke

$\pm 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$. Tehát az egyenlet megoldásai:

$$z_{1,2}=\frac{i-1}{2}\pm\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

5. $z\overline{z}=36-2i$, ami nem lehetséges, hiszen bármely z komplex szám esetén $z\overline{z}$ nem negatív valós szám.

2.46. Feladat. *Legyenek $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Bizonyítsa be, hogy ha a z komplex szám gyöke az $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=0$ egyenletnek, akkor $\overline{z}$ is gyöke az egyenletnek.*

Megoldás. Mivel z gyöke az egyenletnek, ezért $a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0=0$. Konjugálva az egyenlet mindkét oldalát az alábbi egyenletünk lesz:

$$\overline{a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0}=\overline{a_n}\cdot\overline{z}^n+\cdots+\overline{a_1}\cdot\overline{z}+\overline{a_0}=\overline{0}.$$

Felhasználva, hogy egy valós szám konjugáltja önmaga kapjuk, hogy

$$a_n\overline{z}^n+\cdots+a_1\overline{z}+a_0=0,$$

azaz $\overline{z}$ is gyöke az egyenletnek.

2.47. Feladat. *Bontsa fel elsőfokú polinomok szorzatára az alábbi komplex polinomokat:*

1. $P_1(z)=z^2-2z+1$,
2. $P_2(z)=2z^2+4z-30$,
3. $P_3(z)=z^3+z^2+z$,
4. $P_4(z)=z^2-i$.

Megoldás. Nincs más dolgunk, mint meghatározni a polinomok zérushelyeit, hiszen ha az n-edfokú $P(x)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ polinomnak $\alpha_1,\ldots\alpha_n\in\mathbb{C}$ a gyökei, akkor $P(x)=a_n(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_n)$.

1. A másodfokó egyenlet megoldóképlete alapján egyszerűen kiszámolható, hogy a $P_1(z)$ polinomnak az $\alpha=1$ az egyetlen, kétszeres gyöke. Így $P_1(z)=(z-1)(z-1)=(z-1)^2$.
2. A másodfokó egyenlet megoldóképlete könnyen kiszámolható, hogy a $P_2(z)$ polinom két gyöke: $\alpha_1=-5$ és $\alpha_2=3$. Így $P_2(z)=2(z+5)(z-3)$.
3. Azonnal látható, hogy $P_3(z)=z(z^2+z+1)$, tehát a polinomnak az $\alpha_1=0$ gyöke. A feladat befejezéséhez meg kell keresnünk a $z^2+z+1=0$ egyenlet megoldásait. A megoldóképletet használva

$$\alpha_{2,3}=\frac{-1+\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1+\sqrt{-4}}{2}=\begin{cases}\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\end{cases}$$

így $P_3(z)=z(z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$.

4. A $P_4(x)$ polinom gyökeinek kiszámításához a $z^2 = -i$ egyenletet kell megoldani, tehát a zérushelyek a $-i$ komplex szám négyzetgyökei. A $-i$ komplex szám tisztán képzetes, $\mathrm{Im}(-i) = -1 < 0$, így argumentuma $\frac{3\pi}{2}$. Továbbá $|-i| = 1$, így trigonometrikus alakja $\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$. Ezért négyzetgyöke $\pm\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$. Így $P_4(z) = \left(z + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$.

4. Algebrai struktúrák

2.48. Feladat. *Legyen $(G, *)$ egy adott csoport, $F \subset G$. Igazolja, hogy $(F, *)$ akkor és csak akkor csoport, ha bármely $a, b \in F$ esetén $a * b^{-1} \in F$, ahol b^{-1} jelöli a b elem inverzét.*

Megoldás. Ha F csoportot alkot, akkor nyilván teljesül, hogy $a * b^{-1} \in F$ minden $a, b \in F$ esetén, hiszen $b^{-1} \in F$ és $*$ nem vezet ki F-ből.

Fordítva, tegyük fel, hogy $a * b^{-1} \in F$ minden $a, b \in F$ esetén. Belátjuk, hogy ekkor teljesülnek a csoport struktúra tulajdonságai.
Legyen $x, y \in F$ és jelöljük G neutrális elemét e-vel.

(a) Az $a = b = x$ választással kapjuk, hogy $x * x^{-1} = e \in F$, tehát F-ben benne van a neutrális elem.
(b) Az $a = e$, $b = x$ választásával kapjuk, hogy $e * x^{-1} = x^{-1} \in F$, tehát F-ben benne van x inverze.
(c) y-nak az y^{-1} inverze benne van F-ben, így $x * y = x * (y^{-1})^{-1} \in F$, tehát $*$ nem vezet ki F-ből.
(d) Az asszociativitás nyilván teljesül, hiszen az F-nél bővebb G halmazon $*$ assszociatív. (Hasonlóan, ha G kommutatív, akkor F is az.)

2.49. Feladat. *Állapítsa meg, hogy a megadott struktúrák csoportot alkotnak-e:*
1. $(\mathbb{R}, +)$, 2. $(\mathbb{R}, \cdot)$, 3. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, 4. $(\mathbb{N}, +)$, 5. $(\mathbb{N}, \cdot)$,
6. $(\mathbb{Z}, +)$, 7. $(\mathbb{Z}, \cdot)$, 8. $(\mathbb{Q}, +)$, 9. $(\mathbb{Q}, \cdot)$, 10. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Megoldás.

1. A valós számok testaxiómáiból következik, hogy $(\mathbb{R}, +)$ Abel-csoportot alkot.
2. $(\mathbb{R}, \cdot)$ nem alkot csoportot, mert a 0-nak nem létezik multiplikatív inverze.

3. A valós számok testaxiómáiból következik, hogy $(\mathbb{R}, \cdot)$ Abel-csoportot alkot.
4. $(\mathbb{N}, +)$ nem alkot csoportot, ugyanis ha $n \in \mathbb{N}$ és $n \neq 0$, akkor n-nek nincsen additív inverze.
5. $(\mathbb{N}, \cdot)$ nem alkot csoportot, ugyanis ha $n \in \mathbb{N}$ és $n \neq 1$, akkor nincsen multiplikatív inverze.
6. $(\mathbb{Z}, +)$ Abel-csoportot alkot. Mivel $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ és $(\mathbb{R}, +)$ csoportot alkot, az igazoláshoz a 2.48. feladat alapján elég belátni, hogy minden $k, l \in \mathbb{Z}$ esetén $k - l \in \mathbb{Z}$, amely nyilván teljesül.
7. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ nem alkot csoportot, ugyanis ha $k \in \mathbb{Z}$ és $k \neq 1$, akkor nincsen multiplikatív inverze.
8. $(\mathbb{Q}, +)$ Abel-csoportot alkot, ugyanis a 2.12. feladat alapján $p - q \in \mathbb{Q}$ minden $p, q \in \mathbb{Q}$ esetén.
9. $(\mathbb{Q}, \cdot)$ nem alkot csoportot, mert a 0 elemnek nincsen multiplikatív inverze.
10. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ Abel-csoportot alkot, ugyanis a 2.12. feladat alapján $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ minden $p, q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, esetén.

2.50. Feladat. *Állapítsa meg, hogy a megadott kétműveletes struktúrák gyűrűt alkotnak-e:*

1. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, 2. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, 3. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, 4. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Megoldás.

1. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ nem alkot gyűrűt, hiszen $(\mathbb{N}, +)$ nem csoport.
2. A valós számok testaxiómáiból következik, hogy $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ testet alkot.
3. A disztributivitás $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$-ben nyilván teljesül, hiszen az egész számok halmazánál bővebb valós számok halmazában is teljesül. Így az előző feladat alapján $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ gyűrűt alkot. Továbbá, a 2.4. feladat miatt a nullosztómentesség is teljesül, tehát $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ integritástartomány. De $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ nem csoport, így $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nem test.
4. A disztributivitás $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$-ben öröklődik $(\mathbb{R}, +, \cdot)$-ból, így az előző feladat alapján $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ testet alkot.

5. Számosságok

2.51. Feladat. *Legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ egy n elemű halmaz. Igazolja, hogy ekkor A hatványhalmaza 2^n elemű.*

Megoldás. Legyen

$$B := \{(b_1, b_2, \dots, b_n) \mid b_i = 0 \text{ vagy } b_i = 1,\ i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Könnyen látható, hogy B elemeinek száma 2^n. Legyen

$$f : 2^A \to B, \quad f(H) := (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

ahol $b_i := 1$, ha $a_i \in H$, egyébként $b_i := 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. f nyilván invertálható és értékkészlete B, így f bijekció, melyből adódik az állítás. (A feladat egy másik megoldása az 1.9. feladatnál látható.)

2.52. Feladat. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges és $A_k = \{k \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Igazolja, hogy A_k és $\mathbb{N}$ számossága egyenlő.*

Megoldás. Nyilván az $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = k \cdot n$ függvény bijekció $\mathbb{N}$ és A_k között, így a két halmaz egyenlő számosságú.

2.53. Feladat. *Igazolja, hogy $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.*

Megoldás. Legyen

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f((n.m)) := 2^{n-1}(2m-1).$$

Minden természetes szám felírható egy páratlan szám és 2 nem negatív egész hatványaként, így f szürjektív. Másrészt, ha $(n, m) \neq (k, l)$, (azaz $n \neq k$ vagy $m \neq l$), akkor $2^{n-1}(2m-1) \neq 2^{k-1}(2l-1)$, így f injektív is.

2.54. Feladat. *Igazolja, hogy két megszámlálható halmaz Descartes-féle szorzata megszámlálható.*

Megoldás. Legyen a két halmaz A és B. Ekkor léteznek $f : A \to \mathbb{N}$ és $f : B \to \mathbb{N}$ bijekciók. Azonban a

$$H : A \times B \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \qquad H(x, y) = \big(f(x), g(y)\big)$$

függvény bijekció, így $A \times B$ számossága egyenlő $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ számosságával. Így a 2.53. feladat előző feladat felhasználásával adódik az állítás.

2.55. Feladat. *Igazolja, hogy véges sok megszámlálható halmaz Descartes-féle szorzata megszámlálható.*

Megoldás. A feladatot a Descartes-féle szorzatban szereplő halmazok száma szerinti indukcióval igazoljuk. Az állítás $n = 2$-re a 2.54 feladat következménye. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra, azaz k darab megszámlálható halmaz Descartes-féle szorzata megszámlálható. Ebből igazoljuk az állítást $n = k + 1$-re. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ megszámlálható halmazok. Ekkor az

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1} \to (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}, \\ & f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) = \big((x_1, x_2, \ldots, x_k), x_{k+1}\big) \end{aligned}$$

leképezés bijekció, így a két halmaz egyenlő számosságú. Azonban az indukciós feltevésünk szerint az $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ halmaz megszámlálható, így a

2.54 feladat alapján a $(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}$ halmaz is megszámlálható, tehát az $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}$ megszámlálható. A teljes indukció elve alapján az állítás mindig teljesül.

2.56. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{R}$ számossága nagyobb, mint $\mathbb{N}$ számossága, tehát nem megszámlálható.*

Megoldás. Indirekt tegyük fel, hogy $\mathbb{R}$ megszámlálható. Ekkor a $[0,1]$ zárt intervallum is megszámlálható, azaz létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés $\mathbb{N}$ és $[0,1]$ elemei között. Írjuk fel a megfeleltetés sorrendjében a $[0,1]$ elemeit tizedestört alakban:

$$\begin{array}{ccl} 1 & \mapsto & 0,a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ 2 & \mapsto & 0,a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ 3 & \mapsto & 0,a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\ & \vdots & \end{array}$$

Itt $a_{11}, a_{12}, \dots$ számjegyeket jelölnek, a véges tizedestörteket végtelen sok nullával egészítjük ki. A feltevés szerint $[0,1]$ valamennyi eleme fel van sorolva. Legyen

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{ha } \ a_{ii} \neq 1, \\ 0, & \text{ha } \ a_{ii} = 1, \end{cases}$$

és tekintsük a $b = 0,b_1b_2b_3\dots$ számot. Ez a szám nincs benne a fenti felsorolásban, mivel mindegyiktől különböző. Ez ellentmondás, így $\mathbb{R}$ nem megszámlálható. Ebből következik az állítás.

2.57. Feladat. *Mutassa meg, hogy ha $a < b$, akkor az $[a,b]$ intervallum egyenlő számosságú a $[0,1]$ intervallummal.*

Megoldás. Könnyen látható, hogy az

$$f : [0,1] \to [a,b], \ f(x) := a + (b-a)x$$

függvény bijekció $[0,1]$ és $[a,b]$ között, így a két halmaz valóban egyenlő számosságú.

2.58. Feladat. *Mutassa meg, hogy a $[0,\infty[$ intervallum egyenlő számosságú a $[0,1[$ intervallummal.*

Megoldás. Könnyen látható, hogy az

$$f : [0,1[\to [0,\infty[, \ f(x) := \begin{cases} 2x, & \text{ha } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \frac{1}{2x-1} & \text{ha } x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[, \end{cases}$$

függvény bijekció $[0,1[$ és $[0,\infty[$ között, így a két halmaz valóban egyenlő számosságú.

2.59. Feladat. *Igazolja hogy* $]0,1[\sim \mathbb{R}$.

Megoldás. Belátható, hogy az

$$f:]0,1[\to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

függvény bijekció $]0,1[$ és $\mathbb{R}$ között, így a két halmaz valóban egyenlő számosságú.

2.60. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy ha* $A \neq \emptyset$ *megszámlálható halmaz, akkor létezik* $f : \mathbb{N} \to A$ *függvény, melynek képhalmaza* A.

Megoldás. Ha A megszámlálhatóan végtelen, akkor létezik olyan $f : \mathbb{N} \to A$ függvény, mely bijekció, így szürjektív is, azaz képhalmaza A.

Ha A véges, akkor létezik olyan n természetes szám, melyre A számossága megegyezik a $B_n := \{1, 2, \ldots, n\}$ halmazzal, azaz létezik $g : B_n \to A$ bijekció. Legyen $a \in A$ tetszőleges. Ekkor az

$$f : \mathbb{N} \to A, f(m) := \begin{cases} a & \text{ha } m \leq n \\ g(n) & \text{ha } m > n \end{cases}$$

függvény a követelménynek megfelel.

2.61. Feladat. *Igazolja, hogy ha* A *és* B *nem üres halmazok, és van olyan* $f : A \to B$ *függvény, melynek képhalmaza* B*, akkor* A *számossága nagyobb, vagy egyenlő mint* B *számossága.*

Megoldás. A megoldásban felhasználjuk a kiválasztási axiómát:
Nemüres halmazok bármely $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *rendszeréhez létezik* $f : \Gamma \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ *úgynevezett kiválasztási függvény, melyre* $f(\gamma) \in A_\gamma$ *minden* $\gamma \in \Gamma$ *esetén.*

Legyen $A_y := \{x \in A \mid f(x) = y\}$ $(y \in B)$. Ekkor az $\{A_y \mid y \in B\}$ halmazrendszer páronként diszjunkt nem üres halmazokból áll, és létezik eleme. A kiválasztási axióma szerint létezik olyan C halmaz, amely ezen halmazrendszer minden halmazából pontosan egy elemet tartalmaz (a kiválasztási függvény válogatja ki C elemeit). Legyen

$$g : B \to C,\ g(y) = c_y,$$

ahol c_y azon egyértelműen létező C-beli elem, mely az A_y halmazban van. Ekkor g invertálható, és értékkészlete C, tehát bijekció B és C között. Ezért B egyenlő számosságú A egy részhalmazával, melyből következik az állítás.

2.62. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy ha az* $\{A_i \mid i \in I\}$ *indexelt halmazrendszer olyan, hogy minden* i *esetén* A_i *megszámlálható és* I *is megszámlálható, akkor* $\bigcup_{i\in I} A_i$ *is megszámlálható.*

Megoldás. Feltehető, hogy $A_i \neq \emptyset$ minden $i \in I$ esetén. Mivel A_i megszámlálható, így a 2.60. feladat alapján létezik olyan $f_i : \mathbb{N} \to A_i$ függvény, melynek képhalmaza A_i $(i \in I)$. Hasonlóan, létezik olyan $g : \mathbb{N} \to I$, melynek képhalmaza I. Legyen

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i, \ F\big((n,m)\big) := f_{g(n)}(m).$$

Ekkor F képhalmaza $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, így a 2.61. feladat alapján $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ számossága nagyobb, vagy egyenlő, mint $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ számossága. A 2.53 feladat alapján $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ számossága megszámlálhatóan végtelen, melyből az állítás adódik.

2.63. Feladat. *Igazolja, hogy* $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

Megoldás. Nyilván a $-\mathbb{N} := \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ halmaz megszámlálhatóan végtelen, így az egész számok halmaza felírható három megszámlálható halmaz uniójaként:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N},$$

így a 2.62. feladat alapján megszámlálható.

2.64. Feladat. *Igazolja, hogy* $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

Megoldás. Legyen $A_n = \left\{ \dfrac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, tehát a 2.62. feladat miatt megszámlálhatóan végtelen, hiszen A_n bármely n esetén megszámlálhatóan végtelen.

2.65. Feladat. *Mutassa meg, hogy az irracionális számok halmaza nem megszámlálható.*

Megoldás. Amennyiben $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ megszámlálható lenne, akkor a 2.62. feladat és a 2.64. feladat miatt $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ is megszámlálható lenne, mely a 2.56. feladat alapján nem teljesül.

6. Kombinatorikai alapfogalmak

2.66. Feladat. *Igazolja a következő azonosságokat:*

(a) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} = 0,$

(b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$

Megoldás. Mindkét azonosság a binomiális tétel következménye, ugyanis:

(a) $0 = \big(1 + (-1)\big)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}$,

(b) $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$.

2.67. Feladat. *Legyen $0 \le k \le m \le n$. Igazolja a binomiális együtthatók alábbi tulajdonságait:*

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
2. $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$,
3. $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n-k+1}{k+1}\binom{n+1}{k}$,
4. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$,
5. $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$,
6. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \ldots \binom{k}{k}$.

Megoldás.

1. Az azonosság a binomiális együtthatók definíciójából következik.
2. A binomiális együtthatók definíciója alapján

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\big(n+1-(k+1)\big)!} = \frac{(n+1)n!}{(k+1)k!(n-k)!}\\ &= \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k},\end{aligned}$$

   ahol felhasználtuk, hogy $(n+1)! = (n+1)n!$.
3. A binomiális együtthatók definíciója alapján

$$\begin{aligned}\frac{n-k+1}{k+1}\binom{n+1}{k} &= \frac{(n+1-k)(n+1)!}{(k+1)k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\big(n+1-(k+1)\big)!} = \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

4. A binomiális együtthatók definíciója alapján

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\big(n-(k+1)\big)!}\\ &= \frac{(k+1)n!+(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{(n+1)n!}{(k+1)!\big(n+1-(k+1)\big)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\big(n+1-(k+1)\big)!}=\binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

5. A binomiális együtthatók definíciója alapján

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(m-k)!\big(n-k-(m-k)\big)!}\\ &= \frac{n!}{k!}\cdot\frac{1}{(m-k)!(n-m)!}=\frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}\cdot\frac{m!}{m!}\\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!}=\binom{n}{m}\binom{m}{k}.\end{aligned}$$

6. Mivel $n \geq k$, így létezik olyan $l \geq 0$, melyre $n = k + l$. Így az állítás a következő alakban írható:

$$\binom{k+1+l}{k+1}=\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{k+l}{k}.$$

Ezt az egyenlőséget l szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

Ha $l = 0$, akkor $\binom{k+1}{k+1}=1=\binom{k}{k}$, tehát az állítás igaz.

Ha $l = 1$, akkor 4. miatt $\binom{k+1+1}{k+1}=\binom{k+1}{k}+\binom{k+1}{k+1}=\binom{k+1}{k}+\binom{k}{k}$, tehát az állítás $l = 1$ esetén is teljesül. Tegyük fel, hogy az egyenlőség fennáll valamely $l = s$ pozitív egész számra, azaz

$$\binom{k+1+s}{k+1}=\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{k+s}{k}.$$

Ezt és a 4. pontot felhasználva, $l = s + 1$ esetén

$$\begin{aligned}\binom{k+1+s+1}{k+1} &= \binom{k+1+s}{k+1}+\binom{k+1+s}{k}\\ &= \binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\cdots+\binom{k+s}{k}+\binom{k+s+1}{k},\end{aligned}$$

mely éppen az állítás $l = s + 1$-re.

2.68. Feladat. *Hányféle sorrenben tudunk megenni 6 különböző csokit?*

Megoldás. Az egyes lehetséges sorrendek 6 elem egy-egy permutációját alkotják. Ezek száma $6! = 720$.

2.69. Feladat. *Egy pénzérmét 10-szer egymás után feldobunk. Hányféle olyan dobássorozat van, amelyben 7 fej és 3 írás van?*

Megoldás. A sorrendek számát 10 elem ismétléses permutációval kapjuk meg, melyben 7 illetve 3 egyenlő elem van. Tehát a megoldás $\frac{10!}{3!7!} = 120$.

2.70. Feladat. *Hányféleképpen rendezhető egy sorba 8 nő és 6 férfi, ha a nők elől állnak?*

Megoldás. A 8 nő összes lehetséges sorrendje 8 elem permutációinak számával egyenlő, tehát $8!$. A férfiak elrendezési módjainak száma $6!$. A nők bármely sorrendjéhez a férfiak tetszőleges sorrendje tartozhat, tehát az összes esetek számát megkapjuk, ha az előbbi két permutáció számát összeszorozzuk: $8! \cdot 6!$.

2.71. Feladat. *Hány különböző autórendszám készíthető az A, B, C betűk és az $1, 1, 3$ számok segítségével? (egy rendszám első fele három betű, második fele három szám.)*

Megoldás. Az A, B, C betűket $3! = 6$-féleképpen állíthatjuk sorba. A betűk minden egyes sorrendjéhez 3 rendszám tartozik, hiszen az $1, 1, 3$ számokat $\frac{3!}{2!1!} = 3$ féleképpen rendezhetjük sorba. Így összesen $3 \cdot 6 = 18$ féle rendszámot készíthetünk.

2.72. Feladat. *Egy tíz tagú társaság egy kerekasztalhoz hányféleképpen tud leülni?*

Megoldás. A társaságot egy sorban $10!$ különböző módon tudjuk elhelyezni. Ha ezt a sort körré zárjuk, akkor az előbbi elrendezésekből 10 egyenértékű. Így a lehetséges elrendezések száma $\frac{10!}{10} = 9!$.

2.73. Feladat. *Hányféle sorrendbe írhatók a MATEMATIKA szó betűi?*

Megoldás. Összesen 10 darab betűnk van. Az A betű 3-szor, az M és T betű pedig 2-szer fordul elő, így 10 elem ismétléses permutációját kell kiszámolnunk 4 és kétszer 2 egyező elem esetén. Tehát a lehetséges sorrendek száma: $\frac{10!}{4!2!2!} = 37800$.

2.74. Feladat. *Hányféleképpen lehet a sakktáblán elhelyezni 8 bástyát úgy, hogy ne üssék egymást?*

Megoldás. Úgy kell elhelyeznünk a bástyákat, hogy minden sorban és minden oszlopban csak egy bástya lehet. Rakjuk le az első bástyát az első sorba. Ekkor 8 lehetőségünk van. A második bástyát rakjuk le a második sorba, ezt már csak hétféleképpen tehetjük meg, hiszen abba az oszlopba már nem rakhatunk, amelyikben az első bástya áll. A harmadik sorban már csak 6 helyre rakhatjuk a bástyát. Ezt folytatva, az utolsó sorban már csak egy helyre rakhatjuk az utolsó bástyát. Az összes lehetőségek száma tehát $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8!$.

2.75. Feladat. *Hány olyan tízjegyű szám van, amelyben*

(a) minden számjegy csak egyszer fordul elő?
(b) öt darab 1-es, három darab 3-as és két darab 2-es van?
(c) az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *számjegyek mindegyike szerepel, de a* 0 *nem?*

Megoldás.

(a) A 10 számjegy lehetséges sorrendjeinek száma $10!$. Viszont ha a 0 áll elől, akkor csak kilenc jegyű számunk van, így ezek a sorrendek nem megfelelők. Ezekből összesen $9!$ daran van, hiszen az utolsó kilenc számjegy az $1, 2, \ldots, 9$ számjegyek egy tetszőleges sorbarendezése lehet. Tehát a megoldás $10! - 9! = 9 \cdot 9!$.
(b) A megoldás 10 elem ismétléses permutációinak a száma, melyekben 5, 3 illetve 2 darab azonos: $\dfrac{10!}{5!3!2!} = 2520$.
(c) Az adott feltételből következik, hogy az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számjegyek közül az egyik szám kétszer szerepel. Ha ez az 1-es, akkor tíz elem ismétléses permutációjáról van szó, ahol két elem azonos. Ezek száma $\dfrac{10!}{2!}$. Mivel az ismétlődő jegy az adott kilenc szám bármelyike lehet, az összes lehetőség ennek kilencszerese: $9 \cdot \dfrac{10!}{2!}$.

2.76. Feladat. *Hány különböző eredményt kaphatunk, ha egy pénzérmét 6-szor feldobunk, és a sorrendet is figyelembe vesszük?*

Megoldás. Egy dobás alkalmával két lehetőségünk van: fej vagy írás. E két elemből választunk ki hat darabot úgy, hogy egy elemet többször is kiválaszthatunk, azaz két elem hatodosztályú ismétléses variációját kapjuk. Ezek száma: $V^6_{2,\mathrm{ism}} = 2^6$.

2.77. Feladat. *Hány különböző eredményt kaphatunk, ha egy dobókockával 4-szer dobunk, és a sorrendet is figyelembe vesszük?*

Megoldás. Egy dobás alkalmával hatféle számot dobhatunk. Ezen hat számból választunk ki négy darabot úgy, hogy egy elemet többször is kiválaszthatunk, azaz hat elem negyedosztályú ismétléses variációját kapjuk. Ezek száma: $V^4_{6,\mathrm{ism}} = 6^4$.

2.78. Feladat. *Hány olyan ötjegyű szám van,*

1. *amely különböző számjegyekből áll?*
2. *amely 27-re végződik?*
3. *amely nem osztható 5-tel?*
4. *amelyben nincs egymás mellett azonos számjegy?*
5. *amelyben van egymás mellett azonos számjegy?*

Megoldás.

1. A 10 számjegy közül a 0 nem állhat a hatjegyű szám első helyén. Ha állhatna elől a 0 is, akkor 10 elemből kellene 5 darabot kiválasztanunk a sorrendet is számításba véve, mely 10 elem ötödosztályú ismétlés nélküli variációja. Ezek száma $V^5_{10} = 10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6$, melyekből tehát nem megfelelő eset az, amikor 0 áll elől. Ezen esetek száma éppen $V^4_9 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$, hiszen a többi négy helyre 9 számjegy közül választhatunk, a sorrendet is figyelembevéve. Tehát a feladat megoldása: $V^5_{10} - V^4_9 = 27216$.
2. Az ötjegyű számunk első számjegye 0-n kívül bármi lehet, tehát 9 lehetőségünk van rá. Ha ezt kiválasztottuk, akkor a második számjegyet minden esetben tízféleképpen választhatjuk meg, és ezen esetekhez a harmadik számjegyet ismét tízféleképpen. Az utolsó két számjegy adott, tehát az összes esetek száma: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.
3. A feladat 2. részének gondolatmenete alapján, az első helyre 9 számjegyet választhatunk, mert ott 0 nem lehet, a második, harmadik és negyedik számjegynek egyaránt 10-10-10 számjegy közül választhatunk, az utolsó számjegy viszont nem lehet 0 és 5, így csak 8 számjegy közül választhatunk. Az összes esetek száma tehát: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 8 = 72000$.
4. A feladat 2. részének gondolatmenete alapján számolunk. Az első számjegynek a 0-n kívül bármit választhatunk, tehát 9 lehetőségünk van. A második számjegy már lehet 0, de nem lehet az előbb kiválasztott számjegy, így ismét 9 lehetőségünk van. Hasonlóan, a többi számjegy megválasztásakor is 9 lehetőségünk van, mert az előzőleg kiválaszott számjegyet nem választhatjuk. Így az összes esetek száma: $9^5 = 59049$.
5. A feladat első részének gondolatmenetét követve ismétléses variációk esetén adódik, hogy összesen $V^5_{10,\mathrm{ism}} - V^4_{10,\mathrm{ism}} = 10^5 - 10^4 = 90000$ darab ötjegyű szám van. A feladat előző része alapján ebből 59049

darabban nincsen egymás mellett azonos számjegy, így $90000-59049 = 30951$ darabban van egymás mellett azonos számjegy.

2.79. Feladat. *Hány totószelvényt kell kitöltenünk ahhoz, hogy biztosan 13+1 találatosunk legyen?*

Megoldás. Egy mérkőzésre háromféle tippünk lehet: $1, 2, x$. Egy szelvényen ebből a három elemből választunk 14-et úgy, hogy a sorrend számít és egy elemet többször is választhatunk, tehát 3 elem tizennegyedosztályú ismétléses variációjáról van szó. Tehát az összes esetek száma: $V^{14}_{3,\text{ism}} = 3^{14} = 4782969$.

2.80. Feladat. *Kockával 7-szer dobva, a sorrendet is figyelembe véve hány olyan sorozatot kapunk, amelyben legalább egyszer van 6-os?*

Megoldás. A 2.77 feladat alapján az összes esetek száma $V^{7}_{6,\text{ism}} = 6^7$. Azon esetek száma, amikor nem dobunk 6-ost éppen $V^{7}_{5,\text{ism}} = 5^7$, hiszen ekkor az $1, 2, 3, 4, 5$ számok közül választunk hetet úgy, hogy egy elemet többször is választhatunk, és a sorrend számít. Így azon esetek száma, amikor legalább egy hatost dobunk: $V^{7}_{6,\text{ism}} - V^{7}_{5,\text{ism}} = 201811$.

2.81. Feladat. *Egy könyvtár egyik olvasója két könyvet választ egy könyvespolcról. Ezek sorrendjét is megkülönböztetve,* 3660 *lehetősége van olvasmányai megválasztására. Hány könyv van ezen a polcon?*

Megoldás. Jelöljük a polcon lévő könyvek számát n-nel. A választási lehetőségek száma ezen n elem másodosztályú ismétlés nélküli variációinak számával egyenlő, tehát $V^2_n = 3660$. Így $n(n-1) = 3660$, azaz $n^2-n-3660 = 0$. Az egyenlet két megoldása:

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 14640}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{14641}}{2} = \frac{1 \pm 121}{2}.$$

A negatív gyök nyilván nem megoldás, tehát $n = 61$, azaz 61 könyv van a polcon.

2.82. Feladat. *Hány lottószelvényt kellene kitöltenünk ahhoz, hogy biztosan ötösünk legyen?*

Megoldás. Egy lottószelvény kitöltésénél a 90 darab szám közül úgy választunk 5-öt, hogy egy számot csak egyszer választhatunk és a sorrend nem számít, így ez 90 darab elem 5-öd osztályú ismétlés nélküli kombinációja. Az összes lehetséges esetek száma tehát $C^5_{90} = \binom{90}{5} = 43949268$.

2.83. Feladat. *Hány különböző lottószelvényt lehet kitölteni úgy, hogy a* 16-*os, és a* 19-*es számok mindenképpen meg legyenek jelölve?*

Megoldás. A fennmaradó 88 számból kell kiválasztani még hármat ismétlés nélkül úgy, hogy a sorrend nem számít: $C^3_{88} = \binom{88}{3} = \frac{86\cdot 87\cdot 88}{1\cdot 2\cdot 3} = 109736$.

2.84. Feladat. *Egy körmérkőzéses bajnokságon 10 csapat indul. Mindenki játszik mindenkivel otthon és idegenben is. Hány mérkőzésből áll a bajnokság?*

Megoldás. Egy mérkőzéshez ki kell választani a tíz csapatból kettőt ismétlés nélkül, hiszen egy csapat önmagával nem játszik meccset. Mivel a sorrend nem számít, ezt $C_{10}^{2} = \binom{10}{2}$-féleképpen tehetjük meg. Azonban minden csapat minden csapattal kétszer játszik, így összes $2\binom{10}{2} = 90$ mérkőzésből áll a bajnokság.

2.85. Feladat. *Egy összejövetelen huszan vettek részt, egymást mindenki kézfogással köszöntötte. Hány kézfogás történt?*

Megoldás. Egy kézfogáshoz a 20 emberből kettőt kell kiválasztani úgy, hogy a sorrend nem számít és ismétlés nincsen, hiszen saját magával nem fog kezet senki. Ezek száma $C_{20}^{2} = \binom{20}{2} = 190$.

2.86. Feladat. *Hányféleképpen lehet összeállítani egy* 4 *gombócból álló fagylaltkelyhet akkor, ha* 3*-féle ízből választhatunk?*

Megoldás. A kehelyben a gombócok sorrendje nem számít, és egy ízből többször is választhatunk. A lehetséges esetek száma ekkor 3 elem negyedosztályú ismétléses kombinációinak a száma: $C_{3,\mathrm{ism}}^{4} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$.

2.87. Feladat. *Hányféleképpen lehet a* 32 *lapos kártyacsomagot kettéosztani egy fiú és egy lány között úgy, hogy mind a* 4 *ász a lányhoz kerüljön?*

Megoldás. A lánynak a 4 ász mellé még 12 lapot kell osztani a maradék 28-ból, ekkor a 16 darab ki nem választott lap lesz a fiúé. Mivel az egyes játékosoknál lévő lapok sorrendje lényegtelen, az összes lehetséges esetek száma: $C_{28}^{12} = \binom{28}{12} = 30421755$.

2.88. Feladat. *Egy 14 fős gyakorlati csoportban hányféle lehet a hallgatók osztályzatainak eloszlása? (Pl: 6 db 1-es, 4 db 2-es, 0 db 3-as, 1 db 4-es, 3 db 5-ös.)*

Megoldás. A 14 darab hallgató mindegyikéhez választunk egy érdemjegyet az $1, 2, 3, 4, 5$ számok közül, természetesen egy érdemjegyet többször is választhatunk és a hallgatók sorrendje nem számít. Ekkor 5 elemből választunk 14-et ismétléssel, sorrend nélkül: $C_{5,\mathrm{ism}}^{14} = \binom{5+14-1}{14} = \binom{18}{14} = 3060$.

2.89. Feladat. *A hatványozás és az összevonások után mennyi lesz a x^5yz^3 tag együtthatója az alábbi kifejezésben:*

$$(x + 4y + 2z)^9 \ ?$$

Megoldás. Az $(x + 4y + 2z) \cdot \dots \cdot (x + 4y + 2z)$ kifejezésben a szorzások elvégzése után, de még az összevonás előtt minden tagban a kitevők összege 9 és csak az $x^5(4y)(2z)^3$ tagokban szerepel x^5yz^3. Az ilyen tagok számát meghatározhatjuk úgy, hogy először a 9 darab zárójelből kiválasztunk 5-öt (ezekből fogjuk az x-eket venni), majd a maradék 4-ből kiválasztunk 1-et (ebből vesszük az y-t), a fennmaradó 3 zárójelből pedig a z-t:

$$C_9^5 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3 = \binom{9}{5} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{3} = 504 \ .$$

Tehát a keresett együttható $4 \cdot 2^3 \cdot 504 = 16128$.

A feladatot megoldhatjuk közvetlenül a polinomiális tétel alkalmazásával is, eszerint

$$(x + 4y + 2z)^9 = \sum_{s_1+s_2+s_3=9} \frac{9!}{s_1!s_2!s_3!} x^{s_1}(4y)^{s_2}(2z)^{s_3} \ ,$$

így x^5yz^3 együtthatója:

$$\frac{9!}{5!1!3!} \cdot 4 \cdot 2^3 = 16128 \ .$$

2.90. Feladat. *Egy zsákban golyók vannak, mindegyik más színű. Ha a sorrendendet is figyelembe vesszük, akkor hetvennyolccal többféleképpen tudunk kettő golyót kivenni a zsákből visszatevés nélkül, mint amikor nem vesszük figyelembe a sorrendet. Hány golyó van a zsákban?*

Megoldás. Jelölje a golyók számát n. Ha a sorrendet figyelembe vesszük, akkor n elem ismétlés nélküli variációjáról van szó, ha nem, akkor n elem ismétlés nélküli kombinációjáról. Tehát $V_n^2 = C_n^2 + 78$, azaz $n(n-1) = \frac{n!}{2!(n-2)!} + 78$. Átrendezve az egyenletet kapjuk, hogy $n^2 - n - 2 \cdot 78 = 0$. Az egyenlet megoldása:

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8 \cdot 78}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{1 \pm 25}{2}.$$

A negatív gyök nyilván nem megoldás, tehát $n = 13$, azaz 13 golyó van a zsákban.

2.91. Feladat. *Mennyi az* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *számjegyek permutációival képezhető kilencjegyű számok össszege?*

Megoldás. Írjuk egymás alá a 9! darab számot, és végezzük el az összeadást helyiértékenként. Olyan szám, amiben például a kilences áll az utolsó helyiértéken, összesen 8! darab van, ahogyan az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ számok esetén is. Ekkor, ha elvégezzük az összeadást az utolsó helyiértéken, akkor $8!(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)$-et kapunk eredményül. Hasonlóan, ha az utolsó előtti helyiértéken végezzük el az összeadást, a számjegyek összege ugyanennyi lesz, de ezt még tízzel szorozni kell. A legmagasabb helyiértéken 10^8-nal kell szoroznunk, így a számok összege:

$$8!(1+2+3+4+5+6+7+8+9)(1+10+\cdots+10^8) = 8!\cdot 45\cdot(111111111).$$

2.92. Feladat. *A 32 lapos magyar kártyával Csilla, Gábor és János ultit játszanak. Szétosztják a lapokat, Csilla 12, Gábor és János 10-10 lapot kap.*

1. *Hányféle olyan szétosztás lehetséges, melynek során a 3 játékos mindegyikénél van legalább 1 ász?*
2. *Hányféle olyan szétosztás lehetséges, melynek során Csilla azonnal bemondja a piros ultit, melyet csak akkor tesz, ha nála van a piros hetes és még 4 piros lap?*
3. *Hányféle olyan szétosztás lehetséges, melynek során Gábor "betlire" játszik, melyet csak akkor tesz, ha a leosztott lapjaiban csak hetes, nyolcas, kilences és tizes van?*
4. *Hányféle olyan szétosztás lehetséges, melynek során János "durchmarsra" játszik, melyet csak akkor tesz, ha a leosztott lapjaiban nála van minden ász és király?*

Megoldás.

1. Csillának egy vagy két ászt kell osztani. Ha két ászt kap, akkor azokat az ászokat, melyek hozzá kerülnek, $C_4^2 = \binom{4}{2}$-féleképpen tudjuk megválasztani. Ehhez még a 28 nem ász lapból kell választanunk 10-et, melyet $C_{28}^{10} = \binom{28}{10}$-féleképpen tudunk megtenni. Gábornak a maradék két ászból kiválasztunk egyet, erre $C_2^1 = \binom{2}{1}$ lehetőségünk van, és a maradék 18 nem ász lapból kilencet, melyet $C_{18}^9 = \binom{18}{9}$-féleképpen tehetünk. Azon lehetőségek számát, amikor Csilla kap két ászt megkapjuk, ha az egyes eddig megállapított lehetőségek szorzatát vesszük:

$$C_4^2 C_{28}^{10} C_2^1 C_{18}^9 = \binom{4}{2}\binom{28}{10}\binom{2}{1}\binom{18}{9}.$$

Hasonlóan, ha Csilla egy ászt kap, és valamelyik fiú kap két ászt, akkor az összes lehetőség $2 \cdot \binom{4}{1}\binom{28}{11}\binom{3}{2}\binom{17}{8}$. Az összes megfelelő szétosztás száma tehát:

$$\binom{4}{2}\binom{28}{10}\binom{2}{1}\binom{18}{9} + 2 \cdot \binom{4}{1}\binom{28}{11}\binom{3}{2}\binom{17}{8}.$$

2. Csillának odaadjuk a piros hetest. Kedvező esetet kapunk, ha még kap négy, öt, hat vagy hét piros lapot. Ha még négy piros lapot kap, akkor ezeket $C_7^4 = \binom{7}{4}$-féleképpen tudjuk kiválasztani. Ekkor a maradék 24 nem piros lapból még 7-et kell neki adni, melyre $C_{24}^7 = \binom{24}{7}$ lehetőségünk van. Gábor a megmaradt 20 lapból kap 10-et, melyre $C_{20}^{10} = \binom{20}{10}$ lehetőség van. A maradék 10 lap Jánosé lesz. Tehát amikor Csillának öt piros lapja van (melyből egy a piros hetes), az összes esetek száma
$$C_7^4 C_{24}^7 C_{20}^{10} = \binom{7}{4}\binom{24}{7}\binom{20}{10}.$$
Hasonlóan kell okoskodnunk azokban az esetekben is, amikor Csilla még öt, hat illetve hét piros lapot kap. Az összes esetek száma így a következő:
$$C_7^4 C_{24}^7 C_{20}^{10} + C_7^5 C_{24}^6 C_{20}^{10} + C_7^6 C_{24}^5 C_{20}^{10} + C_7^7 C_{24}^4 C_{20}^{10} = \binom{7}{4}\binom{24}{7}\binom{20}{10} + \binom{7}{5}\binom{24}{6}\binom{20}{10} + \binom{7}{6}\binom{24}{5}\binom{20}{10} + \binom{7}{7}\binom{24}{4}\binom{20}{10}.$$

3. Gábornak csak a hetes, nyolcas, kilences és tizes lapokból választunk, melyet $C_{16}^{10} = \binom{16}{10}$-féleképpen tudunk megtenni. Csillának a maradék 22 lapból választunk 12 lapot, melyre C_{22}^{12} lehetőségünk van. Az így maradt 10 lap pedig Jánosé lesz. Tehát az összes esetek száma:
$$C_{16}^{10} C_{22}^{12} = \binom{16}{10}\binom{22}{12} = \frac{16!}{10!6!} \cdot \frac{22!}{12!10!} = \frac{16!22!}{6!(10!)^2 12!}.$$

4. Jánosnak az ászokon és a királyokon kívül még két lapot kell választani a többi 24 lapból, melyet $C_{24}^2 = \binom{24}{2}$-féleképpen tudunk megtenni. Csillának a maradék 22 lapból választunk 12 lapot, melyre C_{22}^{12} lehetőségünk

van. Az így maradt 10 lap pedig Gáboré lesz. Tehát az összes esetek száma:

$$C_{24}^{2}C_{22}^{12} = \binom{24}{2}\binom{22}{12} = \frac{24!}{2!22!} \cdot \frac{22!}{12!10!} = \frac{24!}{2 \cdot 10!12!}.$$

3. fejezet
Vektorterek

1. Vektorterek és altereik

3.1. Feladat. *A vektortér definíciójának felhasználásával igazolja az alábbi állításokat:*

1. *$\mathbb{C}$ vektortér $\mathbb{R}$ felett.*
2. *A legfeljebb n-edfokú valós együtthatós polinomok $\mathcal{P}_n$ halmaza vektortér $\mathbb{R}$ felett, ahol $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Egy $[a, b]$ zárt intervallumon értelmezett valós értékű függvények $\mathcal{F}_{[a,b]}$ halmaza vektortér $\mathbb{R}$ felett.*

Megoldás.

1. $(\mathbb{C}, +)$ Abel-csoport, mivel $\mathbb{C}$ test. A valós számok halmaza része a komplex számok halmazának, így bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén $\alpha(z_1 + z_2) = \alpha z_1 + \alpha z_2$ és $(\alpha + \beta)z = \alpha z + \beta z$ teljesül a disztributivitás miatt és $\alpha(\beta z) = (\alpha\beta)z$ az asszociativitás miatt. Nyilván igaz $1z = z$ is.
2. Legfeljebb n-edfokú polinomok összegének foka is legfeljebb n, így $\mathcal{P}_n$ zárt az összeadásra nézve, továbbá polinomok összeadása kommutatív, asszociatív és egy $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ polinom inverze $(-a_n)x^n + \cdots + (-a_1)x + (-a_0)$. Az azonosan nulla polinom nullelem, így $\mathcal{P}_n$ Abel-csoport az összeadásra nézve. A skalárszorzásra vonatkozó vektortér axiómák szintén teljesülnek, hiszen ha $p_1 = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ és $p_2 = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ tetszőleges $\mathcal{P}_n$-beli polinomok és α, β valós számok, akkor

$$\alpha(p_1 + p_2) = \alpha(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 + b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) =$$
$$(\alpha a_n)x^n + \cdots + (\alpha a_0) + (\alpha b_n)x^n + \cdots + (\alpha b_0) = \alpha p_1 + \alpha p_2,$$
$$(\alpha + \beta)p_1 = ((\alpha + \beta)a_n)x^n + \cdots + ((\alpha + \beta)a_1)x + ((\alpha + \beta)a_0) =$$
$$(\alpha a_n)x^n + \cdots + (\alpha a_0) + (\beta a_n)x^n + \cdots + (\beta a_0) = \alpha p_1 + \alpha p_2,$$
$$\alpha(\beta(p_1)) = \alpha((\beta a_n)x^n + \cdots + (\beta a_0)) = (\alpha\beta a_n)x^n + \cdots + (\alpha\beta a_0) = (\alpha\beta)p_1,$$

$$1p_1 = (1a_n)x^n + \cdots + (1a_1)x + (1a_0) = p_1.$$

3. Könnyen látható, hogy $\mathcal{F}_{[a,b]}$ Abel-csoport a pontonkénti összeadásra nézve: nullelem az $[a, b]$-n azonosan nulla függvény, egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ függvény inverze az $x \mapsto -f(x)$ függvény, a kommutativitás és az asszociativitás nyilvánvaló. Legyen $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ekkor
$$(\alpha(f_1 + f_2))(x) = \alpha((f_1 + f_2)(x)) = \alpha(f_1(x) + f_2(x)) =$$
$$\alpha f_1(x) + \alpha f_2(x) = (\alpha f_1)(x) + (\alpha f_2)(x) = (\alpha f_1 + \alpha f_2)(x),$$
$$((\alpha + \beta)f_1)(x) = (\alpha + \beta)f_1(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_1(x) = (\alpha f_1 + \beta f_1)(x),$$
$$(\alpha(\beta f_1))(x) = \alpha(\beta f_1)(x) = \alpha\beta f_1(x) = ((\alpha\beta)f_1)(x),$$
$$(1f_1)(x) = 1f_1(x) = f_1(x).$$

3.2. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy mely vektortér axiómák teljesülnek, ha $\mathbb{R}^2$-en a vektortér műveleteket a következőképpen definiáljuk: az összeadás legyen $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, tehát a hagyományos koordinátánkénti összeadás; a skalárszorzás pedig $\alpha * (x_1, x_2) = (\alpha x_1, 2\alpha x_2)$.*

Megoldás. Mivel az összeadás a szokásos, így az Abel-csoportra vonatkozó tulajdonságok teljesülnek. A skalár szorzás axiómái esetén
$$\alpha * (\underline{x} + \underline{y}) = \alpha * ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = \alpha * (x_1 + y_1, x_2 + y_2) =$$
$$(\alpha(x_1 + y_1), 2\alpha(x_2 + y_2)) = (\alpha x_1, 2\alpha x_2) + (\alpha y_1, 2\alpha y_2) =$$
$$\alpha * (x_1, x_2) + \alpha * (y_1, y_2) = \alpha * \underline{x} + \alpha * \underline{y},$$
$$(\alpha + \beta) * \underline{x} = (\alpha + \beta) * (x_1, x_2) = ((\alpha + \beta)x_1, 2(\alpha + \beta)x_2) =$$
$$(\alpha x_1, 2\alpha x_2) + (\beta x_1, 2\beta x_2) = \alpha * (x_1, x_2) + \beta * (x_1, x_2) = \alpha * \underline{x} + \beta * \underline{x},$$
tehát az első kettő teljesül. A harmadik tulajdonságnál
$$\alpha * (\beta * \underline{x}) = \alpha * (\beta * (x_1, x_2)) = \alpha * (\beta x_1, 2\beta x_2) = (\alpha\beta x_1, 4\alpha\beta x_2),$$
míg
$$(\alpha\beta) * \underline{x} = (\alpha\beta)(x_1, x_2) = (\alpha\beta x_1, 2\alpha\beta x_2),$$
tehát ez nem teljesül, ahogyan az utolsó axióma sem:
$$1 * \underline{x} = 1 * (x_1, x_2) = (x_1, 2x_2) \neq (x_1, x_2) = \underline{x}.$$

3.3. Feladat. *Vektorteret alkotnak-e az alábbi halmazok a valós számok teste felett, a szokásos összeadással és skalárszorzással?*

1. *Pontosan n-edfokú polinomok halmaza és a zérus polinom, ahol $n \geq 2$,*
2. *Legfeljebb n-edfokú polinomok amelyekre igaz, hogy $p(1) = 1$,*
3. *Legfeljebb n-edfokú polinomok amelyekre igaz, hogy $p(1) = 0$,*
4. *Legfeljebb n-edfokú polinomok amelyekre igaz, hogy $p(x) = p(-x)$,*

5. *Azon $[a, b]$ zárt intervallumon értelmezett valós értékű függvények amelyekre igaz, hogy $f(a) + f(b) = 0$.*
6. *Azon $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ szám n-esek amelyekre igaz, hogy $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 0$.*

Megoldás.

1. Nem, mert ez a halmaz nem zárt az összeadásra nézve. Például ha $p_1(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, $p_2(x) = (-a_n)x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0$, ahol $a_n \neq 0$ és $a_{n-1} \neq -b_{n-1}$, akkor a $p_1 + p_2$ polinom $(n-1)$-edfokú lesz.
2. Ez a halmaz nem tartalmaz zéruselemet, így nem lehet vektortér.
3. Mivel ez a halmaz a $\mathcal{P}_n$ vektortér részhalmaza, így a műveletek tulajdonoságai öröklődnek. A kérdés tehát az, hogy ez a halmaz zárt-e az összeadásra és a skalárszorzásra nézve, azaz, hogy ilyen tulajdonságú polinomok összege illetve skalárszorosa szintén rendelkezik-e azzal a tulajdonsággal, hogy az 1 helyen nulla értéket ad. Mivel ha a p_1 és p_2 polinomoknak gyöke az 1, akkor ezen polinomok összegének is gyöke lesz, illetve tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a λp_1 polinomnak is gyöke lesz, így ez vektortér.
4. Ismét a vektortérműveletkre való zártságot kell ellenőrizni. Legyenek $p_1, p_2 \in \mathcal{P}_n$ olyan polinomok, amelyekre $p_1(x) = p_1(-x)$ és $p_2(x) = p_2(-x)$, ekkor
$$(p_1 + p_2)(x) = p_1(x) + p_2(x) = p_1(-x) + p_2(-x) = (p_1 + p_2)(-x),$$
továbbá tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
$$(\lambda p_1)(x) = \lambda p_1(x) = \lambda p_1(-x) = (\lambda p_1)(-x),$$
tehát ez a halmaz vektortér.
5. Legyenek $f_1, f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények olyanok, hogy $f_1(a) + f_1(b) = 0$ és $f_2(a) + f_2(b) = 0$. Ekkor
$$(f_1 + f_2)(a) + (f_1 + f_2)(b) = f_1(a) + f_2(a) + f_1(b) + f_2(b) = 0,$$
továbbá tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén
$$(\lambda f_1)(a) + (\lambda f_2)(b) = \lambda f_1(a) + \lambda f_2(b) = 0,$$
tehát ez a halmaz vektortér.
6. Nem vektortér, hiszen például a $(0, 1, \ldots, 1)$ és $(1, 0, \ldots, 0)$ szám n-esek elemei a halmaznak, de összegük nem, hiszen az $(1, 1, \ldots, 1)$ szám n-esbeli számok szorzata 1 és nem pedig nulla.

3.4. Feladat. *Legyen V egy vektortér a $\mathbb{T}$ test felett. Igazoljuk, hogy a $H \subset V$ halmaz akkor és csak akkor lesz altér V-ben, ha bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$, és $\underline{x}, \underline{y} \in H$ esetén $\alpha\underline{x} + \beta\underline{y} \in H$.*

Megoldás. Definíció szerint egy $H \subset V$ halmaz altér V-ben, ha bármely $\alpha \in \mathbb{T}$ és $\underline{x}, \underline{y} \in H$ esetén $\alpha\underline{x}$ és $\underline{x}+\underline{y}$ elemei H-nak. Igazolni kell tehát, hogy ezek egyenértékűek a feladatban szereplő feltételekkel.

1. Tegyük fel, hogy tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$, és $\underline{x}, \underline{y} \in H$ esetén $\alpha\underline{x} + \beta\underline{y} \in H$. Ekkor $\underline{y} = \underline{0}$ választással $\alpha\underline{x} \in H$, és $\alpha = \beta = 1$ választással $\underline{x} + \underline{y} \in H$, tehát H altér.
2. Tegyük fel, hogy H altér és legyenek $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$, $\underline{x}, \underline{y} \in H$ tetszőlegesek. Ekkor definíció szerint $\alpha\underline{x} \in H$ és $\beta\underline{y} \in H$, így ezen két H-beli vektor összege is eleme H-nak, tehát $\alpha\underline{x} + \beta\underline{y} \in H$.

3.5. Feladat. *Altheret alkotnak-e az alábbi halmazok a megadott vektorterekben?*

1. $H_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ *halmaz* $\mathbb{R}^3$*-ban,*
2. $H_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ *halmaz* $\mathbb{R}^3$*-ban,*
3. $H_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0\}$ *halmaz* $\mathbb{R}^2$*-ben,*
4. $H_4 = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_3 \mid a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot a_0 = 0\}$ *halmaz* $\mathcal{P}_n$*-ben,*
5. $H_5 = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ folytonos}\}$ *halmaz az* $[a, b]$ *zárt intervallumon értelmezett valós értékű függvények vektorterében.*

Megoldás.

1. H_1 nem lehet altér, hiszen nem eleme a nullvektor.
2. Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $\underline{x}, \underline{y} \in H_2$, tehát $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $y_1 + y_2 + y_3 = 0$. A 3.4. feladat szerint H_2 akkor lesz altér, ha $\alpha\underline{x} + \beta\underline{y} \in H_2$. Mivel
$$\alpha\underline{x} + \beta\underline{y} = \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3),$$
így ezen vektor koordinátáinak összege $\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3 = \alpha(x_1 + x_2 + x_3) + \beta(y_1 + y_2 + y_3) = 0$, tehát H_2 altér.
3. Használjuk most az altér definícióját, legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{x}, \underline{y} \in H_3$. Ekkor
$$\alpha\underline{x} = \alpha(0, x_2) = (0, \alpha x_2) \in H_3,$$
$$\underline{x} + \underline{y} = (0, x_2) + (0, y_2) = (0, x_2 + y_2) \in H_3,$$
tehát H_3 zárt az összeadásra és a skalárszorzásra nézve, azaz altér.
4. H_4 zárt a skalárszorzásra, hiszen ha a $p = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ polinomra teljesül, hogy $a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \cdot a_0 = 0$, akkor a αp polinomban szereplő együtthatókra is: $\alpha a_3 \cdot \alpha a_2 \cdot \alpha a_1 \cdot \alpha a_0 = 0$. Azonban H_4 nem zárt az összeadásra, így nem altér. Valóban, ha két polinom olyan, hogy az együtthatóik között van nulla, ebből még nem következik, hogy az összegük is ilyen. Például
$$p_1 = x^3 + x^2 + x + 0 \in H_4, \quad p_2 = x^3 + x^2 + 0 \cdot x + 1 \in H_4,$$
$$p_1 + p_2 = 2x^3 + 2x^2 + x + 1 \notin H_4.$$

5. H_5 altér, mivel folytonos függvények összege és skalárszorosa is folytonos függvény.

3.6. Feladat. *Határozzuk meg, hogy milyen halmazt alkotnak az alábbi vektorok összes lineáris kombinációi a megadott vektorterekben:*

1. $\underline{x} = (1,2)$, $\underline{y} = (2,4)$ *az* $\mathbb{R}^2$ *vektortérben,*
2. $\underline{x} = (1,2)$, $\underline{y} = (1,3)$ *az* $\mathbb{R}^2$ *vektortérben,*
3. $\underline{x} = (1,2,0)$, $\underline{y} = (2,1,0)$ *az* $\mathbb{R}^3$ *vektortérben,*
4. $p_1 = x^2$, $p_2 = x$ *a* $\mathcal{P}_2$ *vektortérben.*

Megoldás.

1. A két vektor összes lineáris kombinációinak halmaza:
$$\{\lambda\underline{x} + \mu\underline{y} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$
Mivel $\lambda\underline{x} + \mu\underline{y} = \lambda(1,2) + \mu(2,4) = (\lambda + 2\mu)(1,2)$, így ez a halmaz az $(1,2)$ vektor többszöröseiből áll, azaz az origón átmenő $(1,2)$ irányú egyenes.
2. Ezen két vektor összes lineáris kombinációi kiadják a teljes $\mathbb{R}^2$ teret. Valóban, ha $\underline{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ akkor léteznek olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárok, amelyekre $\underline{z} = \lambda\underline{x} + \mu\underline{y}$, hiszen az alábbi egyenletrendszer
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{azaz} \qquad \begin{array}{rcl} z_1 & = & \lambda + \mu \\ z_2 & = & 2\lambda + 3\mu \end{array}$$
tetszőleges z_1, z_2 valós számok esetén megoldható: $\lambda = 3z_1 - z_2$, $\mu = z_2 - 2z_1$.
3. Az $\underline{x} = (1,2,0)$, $\underline{y} = (2,1,0)$ vektorok lineáris kombinációjaként előálló vektorok harmadik koordinátája szintén nulla lesz, és az összes olyan $\underline{z}$ vektor esetén, aminek a harmadik koordinátája nulla, léteznek olyan λ, μ skalárok, hogy $\underline{z} = \lambda\underline{x} + \mu\underline{y}$, hiszen a
$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{azaz} \qquad \begin{array}{rcl} z_1 & = & \lambda + 2\mu \\ z_2 & = & 2\lambda + \mu \\ 0 & = & 0 \end{array}$$
egyenletrendszer megoldható: $\lambda = (2z_2 - z_1)/3$, $\mu = (2z_1 - z_2)/3$. Tehát az $[x, y]$ sík vektorait állítja elő az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektorok lineáris kombinációja.
4. A $p_1 = x^2$, $p_2 = x$ polinomok összes lineáris kombinációjaként azon legfeljebb másodfokú polinomok állnak elő, amelyek nem tartalmaznak konstans tagot: $\lambda p_1 + \mu p_2 = \lambda x^2 + \mu x$, ahol λ, μ tetszőleges valós számok.

3.7. Feladat. *Határozzuk meg, hogy milyen geometriai alakzatot alkotnak* $\mathbb{R}^2$ *és* $\mathbb{R}^3$ *alterei.*

Megoldás.

1. $\mathbb{R}^2$-nek triviális alterei a $\{\underline{0}\}$ (csak a zérusvektorból álló halmaz) és maga az $\mathbb{R}^2$ halmaz. Tegyük fel, hogy H egy olyan altér, amely tartalmazza az $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektort. Ekkor szükségképpen tartalmazza ezen vektor skalárszorosait is, azaz a $\lambda\underline{x}$ alakú vektorokat ($\lambda \in \mathbb{R}$), amelyek egy origón átmenő $\underline{x}$ irányú egyenes vektorai. Mivel ez a halmaz zárt az összeadásra is, így altér. Hogyha H tartalmazna olyan $\underline{y}$ vektort ami nincs ezen az egyenesen, azaz $\underline{y} \neq \alpha\underline{x}$, akkor $\mathbb{R}^2$ minden vektora előállna $\underline{x}$ és $\underline{y}$ lineáris kombinációjaként, tehát $H = \mathbb{R}^2$ teljesülne. Eszerint $\mathbb{R}^2$ nem triviális alterei az origón átmenő egyenesek.
2. $\mathbb{R}^3$ nem triviális alterei az origón átmenő egyenesek és síkok, hiszen ha egy altér tartalmaz egy $\underline{x}$ nem nulla vektort, akkor annak összes skalárszorosát is tartalmazza, azaz egy $\underline{0}$-n átmenő egyenest. Ha az altér tartalmaz olyan $\underline{y}$ vektort ami nincs ezen az egyenesen, akkor az altér tartalmazza a teljes síkot, ami az $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektorokra és az origóra illeszkedik. Ezen sík zárt az összeadásra és a skalárszorzásra, tehát altér. Ha az altér tartalmazna ezen síkon kívül eső vektort, akkor az altér a teljes $\mathbb{R}^3$ térrel egyezne meg.

3.8. Feladat. *Legyenek U és H alterek a V vektortérben.*

1. *Mikor teljesül, hogy $U \cap H$ is altér?*
2. *Mikor teljesül, hogy $U \cup H$ is altér?*
3. *Mikor teljesül, hogy $U + H = \{\underline{u} + \underline{h} \mid \underline{u} \in U,\ \underline{h} \in H\}$ is altér?*

Megoldás.

1. Két altér metszete mindig altér. Ha $\underline{x}, \underline{y} \in U \cap H$, akkor $\underline{x}, \underline{y} \in U$ miatt $\underline{x} + \underline{y} \in U$ és $\underline{x}, \underline{y} \in H$ miatt $\underline{x} + \underline{y} \in H$, tehát $\underline{x} + \underline{y} \in U \cap H$. Hasonlóan $\alpha\underline{x} \in U$, $\alpha\underline{x} \in H$ tetszőleges α skalár esetén, mivel U és H alterek, így $\alpha\underline{x} \in U \cap H$, azaz $U \cap H$ is altér.
2. Tegyük fel, hogy $U \cup H$ is altér. Ekkor tetszőleges $\underline{u} \in U$ és $\underline{h} \in H$ esetén $\underline{u} + \underline{h} \in U \cup H$, azaz $\underline{u} + \underline{h} \in U$ vagy $\underline{u} + \underline{h} \in H$ teljesül. Az első esetben $\underline{u} + \underline{h} = \underline{u}_1$ valamely $\underline{u}_1 \in U$ esetén, így $\underline{h} \in U$, a második esetben pedig $\underline{u} \in H$. Tehát bármely $\underline{u} \in U$ és $\underline{h} \in H$ esetén $\underline{u} \in H$ vagy $\underline{h} \in U$ teljesül, ami csak akkor lehetséges, ha az egyik altér tartalmazza a másikat, $U \subset H$ vagy $H \subset U$. Nyilvánvaló, hogy a feltétel elégséges is.
3. Belátjuk, hogy $U + H$ altér. Legyen $\underline{x}, \underline{y} \in U + H$, ekkor $\underline{x} = \underline{u}_1 + \underline{h}_1$ és $\underline{y} = \underline{u}_2 + \underline{h}_2$ valamely $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U$ és $\underline{h}_1, \underline{h}_2 \in H$ esetén. Ekkor

$$\underline{x} + \underline{y} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \underline{h}_1 + \underline{h}_2 \in U + H$$

és tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\alpha\underline{x} = \alpha\underline{u}_1 + \alpha\underline{h}_1 \in U + H.$$

2. Lineáris függőség, bázis, dimenzió

3.9. Feladat. *Lineárisan függetlenek vagy függőek-e az alábbi vektorrendszerek:*

1. *lineárisan független vektorrendszerből elhagyunk egy elemet,*
2. *lineárisan függő vektorrendszerhez hozzáveszünk még egy elemet,*
3. *a rendszer egyik eleme egy másiknak kétszerese,*
4. *a rendszer egyik eleme három másiknak az összege,*
5. *a rendszer egyik eleme a nullvektor.*

Megoldás.

1. Ha a kapott vektorrendszer lineárisan függő, akkor a rendszer elemeiből a zérusvektor nem triviális lineáris kombinációval is előállítható. Ez a kombináció viszont az eredeti vektorrendszer elemeinek is egy nem triviális lineáris kombinációja (az elhagyott elem együtthatóját 0-nak választva), amely viszont ellentmond a rendszer lineárisan függetlenségének. Tehát a vizsgált vektorrendszer lineárisan független.
2. Az előző pont gondolatmenetéhez hasonlóan belátható, hogy lineárisan függő vektorrendszert kapunk.

3–5. Ha egy vektorrendszer valamely vektora kikombinálható a többiből, akkor a vektorrendszer lineárisan függő. Ebből következik, hogy mind a három vektorrendszer lineárisan függő.

3.10. Feladat. *Igazoljuk, hogy az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha az*

1. *$\underline{x}, \underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y} + \underline{z}$ vektorrendszer lineárisan független,*
2. *$\underline{x}, \underline{y} - \underline{x}, \underline{z} - \underline{x}$ vektorrendszer lineárisan független.*

Megoldás. Mindkét állítás bizonyításához azt a tételt fogjuk használni, miszerint egy vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha vektoraiból a nullvektort csak triviális lineáris kombinációval lehet előállítani (olyan lineáris kombinációt nevezünk triviálisnak, amelyben minden együttható nulla).

1. Először tegyük fel, hogy $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ linárisan független vektorok. Be kell látni, hogy

$$\alpha\underline{x} + \beta(\underline{x} + \underline{y}) + \gamma(\underline{x} + \underline{y} + \underline{z}) = \underline{0}$$

csak akkor lehetséges, ha az α, β, γ együtthatók mind nullák. Átrendezve az egyenlőséget

$$(\alpha + \beta + \gamma)\underline{x} + (\beta + \gamma)\underline{y} + \gamma\underline{z} = \underline{0}$$

adódik. Mivel $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ lineárisan függetlenek, így

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \qquad \beta + \gamma = 0, \qquad \gamma = 0,$$

amiből $\alpha = \beta = \gamma = 0$ adódik.

Megfordítva, legyen $\underline{x}, \underline{x} + \underline{y}, \underline{x} + \underline{y} + \underline{z}$ lineárisan független vektorrendszer. Ekkor ha

$$\underline{0} = \alpha\underline{x} + \beta\underline{y} + \gamma\underline{z} = (\alpha - \gamma)\underline{x} + (\beta - \gamma)(\underline{y} + \underline{z}) + \gamma(\underline{x} + \underline{y} + \underline{z}),$$

így $\alpha - \gamma = 0$, $\beta - \gamma = 0$, $\gamma = 0$, amiből $\alpha = \beta = \gamma = 0$ következik, tehát az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ vektorok is lineárisan függetlenek.

2. Legyenek az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ vektorok linárisan függetlenek és tegyük fel, hogy

$$\underline{0} = \alpha\underline{x} + \beta(\underline{y} - \underline{x}) + \gamma(\underline{z} - \underline{x}).$$

Ekkor

$$\underline{0} = (\alpha - \beta - \gamma)\underline{x} + \beta\underline{y} + \gamma\underline{z}$$

miatt $\alpha - \beta - \gamma = \beta = \gamma = 0$, így $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tehát az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ vektorok is lineárisan függetlenek.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\underline{x}, \underline{y} - \underline{x}, \underline{z} - \underline{x}$ lineárisan függetlenek. Ekkor ha

$$\underline{0} = \alpha\underline{x} + \beta\underline{y} + \gamma\underline{z} = (\alpha + \beta + \gamma)\underline{x} + \beta(\underline{y} - \underline{x}) + \gamma(\underline{z} - \underline{x}),$$

akkor $\alpha + \beta + \gamma = \beta = \alpha = 0$ miatt $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

3.11. Feladat. *Lineárisan függetlenek-e a megadott vektorrendszerek?*

(a) $\mathcal{P}_3$ *vektortérben:* $p_1(x) = (x-1)^2$, $p_2(x) = x^2 - 1$, $p_3(x) = 2x^2 + 2x - 3$.

(b) $\mathbb{C}^3$ *komplex vektortérben:* $\underline{x} = (1, 0, 1)$, $\underline{y} = (i, 1, 0)$, $\underline{w} = (i, 2, 1 + i)$.

Megoldás.

(a) Vizsgáljuk, hogy az

$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomegyenletnek létezik-e az $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ megoldáson kívül más megoldása. A polinomegyenlet a következő alakban írható:

$$\alpha_1(x - 1)^2 + \alpha_2(x^2 - 1) + \alpha_3(2x^2 + 2x - 3) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

azaz mindex x valós szám esetén

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)x^2 + (-2\alpha_1 + 2\alpha_3)x + (\alpha pha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3) = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0.$$

Felhasználva, hogy két polinom akkor és csak akkor egyezik meg egymással, ha az együtthatóik rendre megegyeznek, a következő lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 &=0\\ -2\alpha_1 \qquad +2\alpha_3 &=0\\ \alpha_1-\alpha_2-3\alpha_3 &=0 \end{aligned}$$

A második egyenlethez az első egyenlet kétszeresét hozzáadva, a harmadik egyenletből pedig az első egyenletet kivonva adódik:

$$\begin{aligned} \alpha_1+\ \alpha_2+2\alpha_3 &=0\\ -2\alpha_2+6\alpha_3 &=0\\ -2\alpha_2-5\alpha_3 &=0 \end{aligned}$$

Most a harmadik egyenletből a másodikat kivonva a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} \alpha_1+\ \alpha_2+\ 2\alpha_3 &=0\\ -2\alpha_2+\ 6\alpha_3 &=0\\ -11\alpha_3 &=0 \end{aligned}$$

melyből azonnal adódik, hogy $\alpha_3 = 0$, így $\alpha_2 = 0$, ezért $\alpha_1 = 0$. Tehát a 0 csak a triviális módon kombinálható ki a p_1, p_2, p_3 polinomokból, így azok lineárisan függetlenek. (A lineáris egyenletrendszerek megoldásának módszereit lásd a 4. fejezet 4. részében.)

(b) Vizsgáljuk, hogy az

$$\alpha_1 \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\underline{x}} + \alpha_2 \underbrace{\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}}_{\underline{y}} + \alpha_3 \underbrace{\begin{pmatrix}i\\2\\1+i\end{pmatrix}}_{\underline{w}} = 0$$

egyenletnek létezik-e az $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ megoldáson kívül más megoldása $\mathbb{C}$-ben. A következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} \alpha_1+i\alpha_2+ \qquad i\alpha_3 &=0\\ \alpha_2+ \qquad 2\alpha_3 &=0\\ \alpha_1 \qquad +(1+i)\alpha_3 &=0 \end{aligned}$$

Az első egyenletet a harmadikból kivonva, majd a második egyenlet i-szeresét a harmadikhoz hozzáadva a következő egyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned} \alpha_1+i\alpha_2+ \quad & i\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2+ \quad & 2\alpha_3 = 0 \\ & (1+2i)\alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

melyből látható, hogy csak az $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ teljesíti, így az $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{w}$ vektorrendszer lineárisan független $\mathbb{C}^3$-ban.

3.12. Feladat. *A valós függvények terében lineárisan független rendszert alkotnak-e a következő függvényrendszerek?*

1. $(1+x)^2, 4, 6x, x^2$*;*
2. $\cos^2 x, 4, \cos 2x$;
3. $\sin x, \cos x$;
4. $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$.

Megoldás.

1. A függvények lineárisan függőek, hiszen
$$(1+x)^2 = \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 6x + x^2,$$
tehát az $(1+x)^2$ függvény előáll a másik három lineáris kombinációjaként.
2. A jól ismert
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1) \qquad (x \in \mathbb{R})$$
azonosságot felhasználva kapjuk, hogy
$$\cos^2 x = \frac{1}{8}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cos x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
így a rendszer lineárisan függő.
3. Két vektor csak akkor lehet függő, ha egyik a másiknak lineáris kombinációja. Tegyük fel, hogy létezik $c \in \mathbb{R}$, melyre $\sin x = c\cdot\cos x$ minden x valós szám esetén. Ekkor
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = c \qquad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})\right),$$
amely nyilvánvalóan nem igaz. Tehát a két függvény lineárisan független.
4. Mivel két polinom akkor és csak akkor egyezik meg egymással, ha az együtthatóik rendre megegyeznek, az
$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \cdot 1 = 0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

polinomegyenletből következik, hogy $\alpha_n = \alpha_{n-1} = \cdots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$, azaz a 0 csak triviálisan állítható elő a függvények lineáris kombinációjaként, tehát a rendszer lineárisan független.

3.13. Feladat. *Legyen V egy n-dimenziós valós vektortér. Az alábbi állítások közül melyek igazak?*

1. *V-ben van $n+1$ elemű lineárisan független vektorrendszer.*
2. *V bármely két generátorrendszere egyenlő elemszámú.*
3. *V bármely két minimális generátorrendszere egyenlő elemszámú.*
4. *Ha G elemszáma n és független, akkor generátorrendszere V-nek.*
5. *Ha G elemszáma n és generátorrendszere V-nek, akkor független is.*
6. *Bármely n elemű részhalmaz generátorrendszere V-nek.*
7. *Van olyan $n-1$ elemű halmaz, amely generátorrendszere V-nek.*
8. *Van olyan $n+1$ elemű halmaz, amely generátorrendszere V-nek.*

Megoldás.

1. Az állítás nem igaz. V n dimenziós, így bázisainak elemszáma n. Az $n+1$ elemű lineárisan független vektorrendszer létezése ellentmondana annak, hogy a bázis egy olyan lineárisan független vektorrendszer, mely maximális elemszámú.
2. Az állítás nem igaz. V egy bázisa generátorrendszer, melynek elemszáma n, hiszen V n-dimenziós. Ha ehhez a bázishoz hozzáadunk egy újabb vektort V-ből, akkor nyilvánvalóan szintén generátorrendszert kapunk, melynek elemszáma már $n+1$.
3. Az állítás igaz, hiszen minimális generátorrendszer bázis, így elemszáma mindig n.
4. Az állítás igaz, hiszen ekkor G szükségképpen bázis, így generátorrendszer is.
5. Az állítás igaz, hiszen ekkor G minimális generátorrendszer, tehát bázis, így független.
6. Az állítás nyilvánvalóan nem igaz. Például ha $n > 1$ és $\underline{x} \in V$, akkor $\mathcal{L}(\underline{x}, 2 \cdot \underline{x}, \ldots, n \cdot \underline{x}) = \mathcal{L}(\underline{x}) \neq V$.
7. Az állítás nem igaz, hiszen V minimális generátorrendszerének elemszáma n.
8. Az állítás igaz, hiszen ha V egy bázisához hozzáveszünk egy új vektort, akkor egy $n+1$ elemből álló generátorrendszert kapunk.

3.14. Feladat. *Legyen $\underline{a}_1 = (0,1,0)$, $\underline{a}_2 = (0,0,1)$, $\underline{b}_1 = (0,2,1)$ és $\underline{b}_2 = (0,1,2)$. Igazoljuk, hogy az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ illetve a $\underline{b}_1, \underline{b}_2$ vektorrendszerek ugyanazt az alteret generálják $\mathbb{R}^3$-ban.*

Megoldás. Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ vektorrendszer nyilvánvalóan az $[y, z]$ síkot generálja, hiszen az

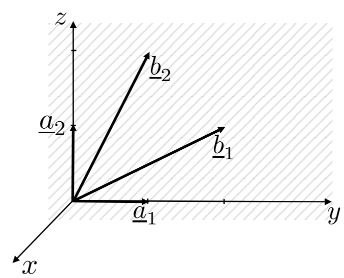
$$L := \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

altér minden vektora felírható lineáris kombinációjukként:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_1} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{a}_2}.$$

A $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$ elemei L-nek, és szintén generálják az altér valamennyi elemét:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}_1} + \left(\frac{2}{3}z - \frac{1}{3}y\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\underline{b}_2}.$$



3.15. Feladat. *Legyen* $\underline{a}_1 = (1, 2, 3)$. *Adjon meg olyan* $\underline{a}_2$ *és* $\underline{a}_3$ *vektorokat* $\mathbb{R}^3$*-ban, melyekkel* $\underline{a}_1$ $1, 2$ *illetve* 3 *dimenziós alteret generál.*

Megoldás.

(a) 3 vektor akkor generál 1 dimenziós alteret (0-n átmenő egyenest) $\mathbb{R}^3$-ban, ha egymás skalárszorosai. Például

$$\underline{a}_1 = (1, 2, 3), \quad \underline{a}_2 = (2, 4, 6), \quad \underline{a}_3 = (3, 6, 9).$$

(b) 3 vektor akkor generál 2 dimenziós alteret (0-n átmenő síkot) $\mathbb{R}^3$-ban, ha lineárisan függőek, de kiválasztható belőlük két lineárisan független. Például

$$\underline{a}_1 = (1, 2, 3), \quad \underline{a}_2 = (1, 1, 1), \quad \underline{a}_3 = (2, 3, 4).$$

Itt ugyanis $\underline{a}_3 = \underline{a}_1 + \underline{a}_2$.

(c) Ha a 3 vektor lineárisan független, a teljes $\mathbb{R}^3$ vektorteret legenerálják. Például

$$\underline{a}_1 = (1, 2, 3), \quad \underline{a}_2 = (1, 0, 0), \quad \underline{a}_3 = (0, 1, 0).$$

3.16. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi vektorterek egy bázisát és dimenzióját:*

1. *A komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ felett.*
2. *A valós együtthatós polinomok $\mathcal{P}_n$ vektortere $\mathbb{R}$ felett.*
3. *A legfeljebb n-edfokú komplex együtthatós polinomok $\mathbb{R}$ felett.*
4. *A valós számok halmaza $\mathbb{Q}$ felett.*

Megoldás.

1. Ha $z \in \mathbb{C}$, akkor létezik $a, b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $z = a+bi = a\cdot 1+b\cdot i$, azaz z előáll az 1 és az i komplex számok lineáris kombinációjaként. Tehát az $1, i$ rendszer generátorrendszere $\mathbb{C}$-nek $\mathbb{R}$ felett. Az $1, i$ rendszer nyilván független is, így bázis. Ennek a bázisnak az elemszáma 2, ennélfogva a vektortér dimenziója is 2.
2. Az $1, x, x^2, \ldots, x^n$ polinomok halmaza nyilvánvalóan generátorrendszere a $\mathcal{P}_n$ vektortérnek és lineárisan független is (lásd 3.12. feladat), így bázisa $\mathcal{P}_n$-nek. Tehát $\mathcal{P}_n$ dimenziója $n+1$.
3. Az $1, i, x, ix, x^2, ix^2, \ldots, x^n, ix^n$ polinomok halmaza lineárisan független és generátorrendszere a legfeljebb n-edfokú komplex együtthatós polinomok $\mathbb{R}$ feletti vektorterének, így bázis is. Tehát a vektortér dimenziója $2(n+1)$.
4. A vektortérnek nem létezik véges bázisa, végtelen dimenziós. Ennek bizonyításához indirekt tegyük fel, hogy létezik véges bázis: $a_1, a_2, \ldots a_n$. Ekkor azonban ha $x \in \mathbb{R}$, akkor létezik $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$ úgy, hogy $x = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots x_na_n$. Viszont az így előállítható valós számok halmazának számossága egyenlő a racionális számok n-szeres Descartes-féle szorzatával, mely a 2.55. feladat alapján megszámlálható. Ez ellentmond annak a ténynek, hogy a valós számok számossága nem megszámlálható (lásd 2.56). Az ellentmondás oka az indirekt feltevés volt.

3.17. Feladat. *Tekintsük a valós együtthatós polinomok $\mathcal{P}_n$ valós vektorterét. Hány dimenziós alteret alkotnak a megadott polinomhalmazok?*

1. $L_1 = \{p \in \mathcal{P}_n | p(2004) = 0\}$.
2. $L_2 = \{p \in \mathcal{P}_n | p(x) = p(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

Megoldás.

1. Ha $p(2004) = 0$, akkor $p(x)$ felírható $(x-2004)p'(x)$ alakban, ahol $p'(x) \in \mathcal{P}_{n-1}$. Ezért p előáll a

$$B_1 := \{(x-2004)\cdot 1, (x-2004)x, (x-2004)x^2, \ldots, (x-2004)x^{n-1}\}$$

halmaz elemeinek lineáris kombinációjaként. B_1 lineárisan független is, ugyanis az

$$\alpha_0(x-2004)\cdot 1+\ldots\alpha_{n-1}(x-2004)x^{n-1}=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$$

polinomegyenletből $x\neq 2004$ esetén az

$$\alpha_0\cdot 1+\alpha_1 x+\ldots\alpha_{n-1}x^{n-1}=0 \qquad (x\in\mathbb{R}, x\neq 2004)$$

egyenlet következik, melynek csak az $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_{n-1}=0$ a megoldása. Tehát L_1-nek B_1 bázisa, mely n darab elemből áll, ezért L_1 dimenziója n.

2. Legyen $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. Két esetet tárgyalunk n paritásától függően.
   (a) Legyen n páros. Ebben az esetben, $p(x)=p(-x)$ a következő egyenletet jelenti:

$$\begin{aligned} a_nx^n &+ a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \\ &= a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}+\cdots-a_1x+a_0 \quad (x\in\mathbb{R}) \end{aligned}$$

   amely ekvivalens az

$$a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-3}x^{n-3}+\cdots+a_1x=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$$

   egyenlettel. Ebből következik, hogy az $a_{n-1}, a_{n-3},\ldots,a_1$ együtthatók 0-val egyenlőek, így az L_2 alteret legenerálja a

$$B_2:=\{x^n,x^{n-2},\ldots,x^4,x^2,1\}$$

   halmaz. Ez a halmaz nyilván lineárisan független is, így L_2-nek egy bázisa. B_2-nek $\dfrac{n}{2}+1$ darab eleme van, mely éppen L_2 dimenziója.

   (b) Legyen n páratlan. A másik esethez hasonlóan belátható, hogy a

$$B_2':=\{x^{n-1},x^{n-3},\ldots,x^4,x^2,1\}$$

   halmaz bázisa L_2-nek, így a dimenzió $\dfrac{n-1}{2}+1$.

3.18. Feladat. *Van-e olyan bázisa a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomok vektorterének, mely nem tartalmaz elsőfokű vagy másodfokú polinomot?*

Megoldás. Igen, van. Egy bázis, amely nem tartalmaz elsőfokú polinomot:

$$x^3, x^2, x^2+x, 1$$

Egy bázis, amely nem tartalmaz másodfokú polinomot:

$$x^3, x^3+x^2, x, 1$$

3.19. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy a b_1, b_2, b_3 vektorrendszer bázist alkot-e $\mathbb{R}^3$-ban. Amennyiben igen, adjuk meg az $\underline{x} = (4, 3, 1)$ vektor koordinátáit az adott bázisra vonatkozóan:*

(a) $\underline{b}_1 = (1, 1, 1)$, $\underline{b}_2 = (1, 2, 2)$, $\underline{b}_3 = (1, 2, 3)$,
(b) $\underline{b}_1 = (1, 2, 2)$, $\underline{b}_2 = (2, 1, 2)$, $\underline{b}_3 = (3, 3, 4)$,
(c) $\underline{b}_1 = (2, 4, 2)$, $\underline{b}_2 = (4, -2, -2)$, $\underline{b}_3 = (1, -8, -5)$,

(e) $\underline{b}_1 = (1, 2, 3)$, $\underline{b}_2 = (2, 6, 9)$, $\underline{b}_3 = (4, 9, 14)$,
(f) $\underline{b}_1 = (1, 2, 3)$, $\underline{b}_2 = (4, 5, 6)$, $\underline{b}_3 = (7, 8, 9)$,
(g) $\underline{b}_1 = (2, 2, 0)$, $\underline{b}_3 = (-1, 1, 0)$, $\underline{b}_3 = (0, 0, 1)$.

Megoldás.

(a) Mivel a vektorrendszer 3 tagú, annak igazolásához, hogy bázis elegendő belátni, hogy a rendszer lineárisan független. Ehhez pedig meg kell viszgálni, hogy az

$$\alpha_1\underline{b}_1 + \alpha_2\underline{b}_2 + \alpha_3 b_3 = \underline{0}$$

egyenletnek létezik-e nem triviális megoldása. Az egyenlet a következő lineáris egyenletrendszerrel egyezik meg:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

A második és harmadik sorból az első sort kivonva, majd az így kapott egyenletrendszerben a harmadik sorból a másodikat kivonva a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

melyről azonnal leolvasható, hogy az $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ az egyetlen megoldása, tehát a vektorrendszer lineárisan független, így bázis. Az $\underline{x}$ vektor koordinátáinak meghatározásához meg kell oldani az

$$x_1\underline{b}_1 + x_2\underline{b}_2 + x_3\underline{b}_3 = \underline{x}$$

egyenletet, mely az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszer alakban írható, amely a feladat első részében leírt módon a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 4 \\ x_2+x_3 &= -1 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Ebből kapjuk, hogy $x_3 = -2$, $x_2 = 1$ és $x_1 = 5$. Tehát a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ bázisra vonatkozó koordinátája $\underline{x}$-nek $(5, 1, -2)$.

Megjegyezzük, hogy a második egyenletrendszer egyértelmű megoldhatósága maga után vonja a vektorrendszer bázis voltát. Ugyanis, ha a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ vektorrendszer nem bázis, akkor nem generátorrendszer és lineárisan függő is, így egy $\mathbb{R}^3$-beli vektor vagy nem áll elő a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ vektorok lineáris kombinációjaként, vagy többféleképpen előáll. Azaz az egyenletrendszer ellentmondásos, vagy a megoldás nem egyértelmű.

(b) Az előző pont megjegyzése alapján csak az $x_1\underline{b}_1 + x_2\underline{b}_2 + x_3\underline{b}_3 = \underline{x}$ egyenlettel, azaz az

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= 4 \\ 2x_1+x_2+3x_3 &= 3 \\ 2x_1+2x_2+4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel foglalkozunk. A második és harmadik sorból az első sor kétszeresét kivonva, majd a második sort 2-vel, a harmadik sort pedig 3-mal szorozva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+2x_3 &= 4 \\ -6x_2-6x_3 &= -10 \\ -6x_2-6x_3 &= -21 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer utolsó két sora egymásnak ellentmond, így a megadott vektorrendszer nem bázis.

(c) Az (a) pont megjegyzése alapján csak az $x_1\underline{b}_1 + x_2\underline{b}_2 + x_3\underline{b}_3 = \underline{x}$ egyenlettel, azaz az

$$\begin{aligned} 2x_1+4x_2+x_3 &= 4 \\ 4x_1-2x_2-8x_3 &= 3 \\ 2x_1-2x_2-5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszerrel foglalkozunk. Az első sor kétszeresét illetve egyszeresét a második illetve harmadik sorból kivonva a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4 \\ -10x_2 - 10x_3 &= -5 \\ -6x_2 - 6x_3 &= -3 \end{aligned}$$

A második és a harmadik sor egymás konstansszorosai, így az egyik elhagyható. A

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4 \\ -10x_2 - 10x_3 &= -5 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása nem egyértelmű, így a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ vektorrendszer nem bázis.

(d) A vektorrendszer bázis. Ebben a bázisban $\underline{x}$ koordinátái $(30, 1, -7)$.
(e) A vektorrendszer nem bázis.
(f) A vektorrendszer bázis. Ebben a bázisban $\underline{x}$ koordinátái $(7/4, -1/2, 1)$.

3.20. Feladat. *Legyen V egy vektortér, és H, L két altér V-ben. Válaszoljon az alábbi kérdésekre!*

(a) Ha $\dim V = 6$, $\dim H = 4$, $\dim L = 3$ és $H + L = V$, akkor hány dimenziós $H \cap L$?
(b) Igaz-e, hogy ha $\dim V = 8$, $\dim H = 5$ és $\dim L = 4$, akkor H és L metszete tartalmaz nem nulla vektort?
(c) Ha $\dim(H + L) = \dim H + 1$ és $\dim L = 4$, akkor mit mondhatunk $H \cap L$ dimenziójáról?

Megoldás.

(a) Az alterek dimenziójára vonatkozó tétel szerint

$$\begin{aligned} \dim(H \cap L) &= \dim H + \dim L - \dim(H + L) \\ &= \dim H + \dim L - \dim V = 1. \end{aligned}$$

(b) Igaz, hiszen $\dim(H+L)$ maximum 8, így a metszet dimenziója az előző pontban alkalmazott tétel szerint minimum 1.
(c) Az első pontban alkalmazott tétel szerint a H és L metszetének dimenziója 3.

3. Alterek direkt összege

3.21. Feladat. *Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ vektortérben az alábbi altereket:*

$H_1 = \{(x,0,0)|x \in \mathbb{R}\}$
$H_2 = \{(0,y,0)|y \in \mathbb{R}\}$
$H_3 = \{(0,0,z)|z \in \mathbb{R}\}$
$H_4 = \{(x,y,0)|x,y \in \mathbb{R}\}$
$H_5 = \{(0,y,z)|y,z \in \mathbb{R}\}$

Az alábbi állítások közül melyek igazak?

1. $\mathbb{R}^3 = H_1 + H_2 + H_3$,
2. $\mathbb{R}^3 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$,
3. $\mathbb{R}^3 = H_4 + H_5$,
4. $\mathbb{R}^3 = H_4 \oplus H_5$.

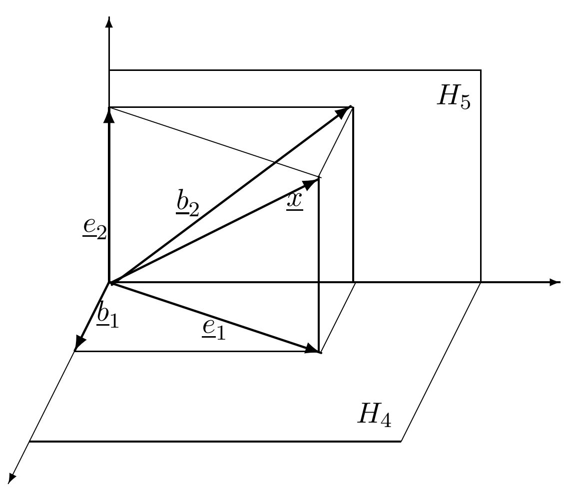
Megoldás.

1. 2. Az állítások nyilván igazak, hiszen minden $\mathbb{R}^3$-beli vektor előáll H_1, H_2 és H_3-beli vektorok összegeként: ha $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ akkor $(x,y,z) = (x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z)$. Mivel ez az előállítás egyértelmű, az alterek összege egyben direkt összeg is. Ez egyébként következménye annak a tételnek is, miszerint $V = A \oplus B$ akkor és csak akkor, ha $V = A + B$ és $A \cap B = \{\underline{0}\}$, ahol V egy vektortér és A,B ennek alterei.

3. 4. Teljesül, hogy $\mathbb{R}^3 = H_4 + H_5$, hiszen tetszőleges $\underline{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ vektor előáll H_4 és H_5-beli vektorok összegeként, de az előállítás nem egyértelmű, így a 4. állítás nem igaz. Valóban,

$$(x,y,z) = \underbrace{(x,y,0)}_{\underline{e}_1 \in H_4} + \underbrace{(0,0,z)}_{\underline{e}_2 \in H_5}$$

$$(x,y,z) = \underbrace{(x,0,0)}_{\underline{b}_1 \in H_4} + \underbrace{(0,y,z)}_{\underline{b}_2 \in H_5}$$



tehát $\underline{x}$-et többféleképpen is fel lehet bontani H_4 és H_5-beli vektorok összegére. Az a tény, hogy a 4. állítás nem igaz, abból is következik, hogy a H_4 és H_5 alterek metszete nem csak a nullvektorból áll.

3.22. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi feladatokat, amelyek arra a tételre vonatkoznak, miszerint ha H egy altér a V vektortérben, akkor létezik olyan L altér V-ben, amelyre $V = L \oplus H$.*

1. *Legyen $H_1 = \{(0, y, y) | y \in \mathbb{R}\}$. Határozzunk meg egy olyan H_2 alteret $\mathbb{R}^3$-ban, amelyre $\mathbb{R}^3 = H_1 \oplus H_2$ teljesül és határozzuk meg az $\underline{x} = (2, 3, 4)$ vektor egyértelmű felbontását H_1 illetve H_2-beli vektororok összegére!*
2. *Legyen $L_1 = \{(x, x, z) | x, z \in \mathbb{R}\}$. Határozzunk meg egy olyan L_2 alteret $\mathbb{R}^3$-ban, amelyre $\mathbb{R}^3 = L_1 \oplus L_2$ teljesül és határozzuk meg az $\underline{x} = (1, 2, 3)$ vektor egyértelmű felbontását L_1 illetve L_2-beli vektororok összegére!*
3. *Legyen P_1 az az altér $\mathcal{P}_4$-ben, amit a $p_1 = 2x^3 + x$ és a $p_2 = x^2$ polinomok generálnak. Adjunk meg egy olyan P_2 altert, hogy $\mathcal{P}_4 = P_1 \oplus P_2$ és írjuk fel a $p = 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + 3$ polinom egyértelmű felbontását P_1 és P_2-beli polinomok összegére.*

Megoldás.

1. Mivel a H_1 altér 1-dimenziós, így H_2-nek egy olyan 2-dimenziós alteret választhatunk, hogy H_1 és H_2 bázisainak egyesítése $\mathbb{R}^3$ egy bázisát adja. Legyen például

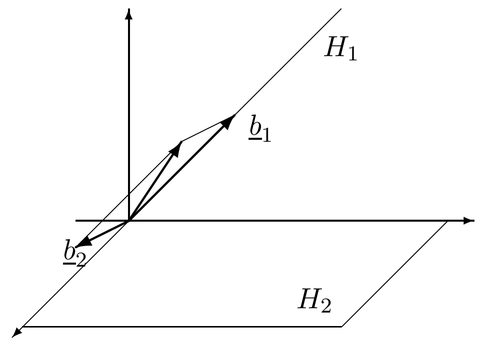
$$H_2 = \mathcal{L}(\underline{e}_1 = (1, 0, 0), \underline{e}_2 = (0, 1, 0)),$$

azaz az $[x, y]$ sík (természetesen más alteret is választhattunk volna). Keressük azokat az egyértelműen létező $a, b, c \in \mathbb{R}$ számokat, amikre

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underbrace{a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in H_1} + \underbrace{b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in H_2}$$

teljesül. Innen $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$.

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}}_{\underline{b}_1\in H_1} + \underbrace{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\underline{b}_2\in H_2}$$



2. Mivel az L_1 altér 2-dimenziós és egy bázisát alkotják a $\underline{b}_1 = (1,1,0)$, $\underline{b}_2 = (0,0,1)$ vektorok, így az L_2 altér 1-dimenziós lesz. L_2 lehet bármelyik olyan altér, amit egy $\underline{b}_3$ vektor generál és $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ lineárisan független vektorrendszer. Legyen például $\underline{b}_3 = (1,0,0)$, ekkor keressük azokat az $a, b, c \in \mathbb{R}$ számokat, amikre
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \underbrace{a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in L_1} + \underbrace{c\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\in L_2}$$
teljesül. Innen $a = 2$, $b = 3$, $c = -1$.
3. A P_1 altér 2-dimenziós, így a P_2 altér 3-dimenziós. Legyen például P_2 az az altér, amelyet a $p_3 = x^4$, $p_4 = x$, $p_5 = 1$ polinomok generálnak. Ekkor

$$3x^4+4x^3+3x^2+x+3 = 3x^4+2(2x^3+x)+3x^2-x+3 = 3p_3+2p_1+3p_2-p_4+3p_5,$$

tehát a felbontás:

$$p = 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + 3 = \underbrace{4x^3 + 3x^2 + 2x}_{2p_1+3p_2\in P_1} + \underbrace{3x^4 - x + 3}_{3p_3-p_4+3p_5\in P_2}.$$

4. Lineáris sokaságok, faktortér

3.23. Feladat. *Állapítsuk meg, hogy $\underline{x} + H$ és $\underline{y} + L$ ugyanazt a lineáris sokaságot jelenti-e a V vektortérben vagy sem, ha*

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\underline{x} = (1,2,3)$, $H = \mathcal{L}((2,1,1),(1,0,1))$, $\underline{y} = (1,-2,4)$, $L = \mathcal{L}((1,1,2),(3,1,2))$,
2. $V = \mathbb{R}^2$, $\underline{x} = (1,2)$, $H = \mathcal{L}((2,1))$, $\underline{y} = (-1,1)$, $L = \mathcal{L}((-4,-2))$,
3. $V = \mathbb{R}^3$, $\underline{x} = (1,0,0)$, $H = \mathcal{L}((1,1,0),(0,0,1))$, $\underline{y} = (2,3,4)$, $L = \mathcal{L}((1,1,2),(1,1,3))$.

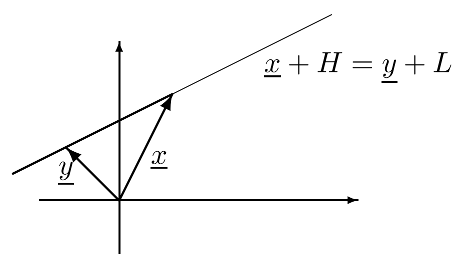
Megoldás. Az $\underline{x}+H$ és az $\underline{y}+L$ lineáris sokaságok megegyeznek, ha irányalterük azonos és $\underline{y} \in \underline{x}+H$.

1. Nem egyezhet meg a két lineáris sokaság, mivel irányalterük különböző, hiszen például az $(1,0,1)$ vektor nem állítható elő az L altér bázisvektorainak lineáris kombinációjaként, nem léteznek olyan $t, l \in \mathbb{R}$ számok, hogy

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \quad \text{vagyis} \quad \begin{array}{rcr} 1 &=& t+3l \\ 0 &=& t+l \\ 1 &=& 2t+2l \end{array}.$$

   Látható, hogy a két utolsó egyenlet ellentmond egymásnak.
2. Mivel $(-4,-2) = -2(2,1)$, így $L = H$, tehát az irányalterek megegyeznek. Ezután a kérdés az, hogy $\underline{y}$ előáll-e $\underline{x}+\underline{h}$ alakban, ahol $\underline{h} \in H$, azaz létezik-e olyan $t \in \mathbb{R}$, hogy

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}_{\underline{h}\in H}.$$



   Mivel $t = -1$ esetén ez teljesül, a két lineáris sokaság megegyezik. A lineáris sokaság megadásánál $\underline{x}$ és $\underline{y}$ is választható reprezentánsvektornak, akárcsak a lineáris sokaság bármely másik eleme.
3. A két lineáris sokaság irányaltere megegyezik, hiszen a H altér bázisvektorainak lineáris kombinációciójával előállíthatóak az L altér bázisvektorai:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Most megvizsgáljuk, hogy $\underline{y}$ eleme-e az $\underline{x}+H$ lineáris sokaságnak, azaz léteznek-e olyan $t,l\in\mathbb{R}$ számok, hogy

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \text{vagyis}\quad \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Látható, hogy ilyen számok nem léteznek, tehát a két lineáris sokaság különbözik, de irányalterük ugyanaz (két, egymással párhuzamos sík).

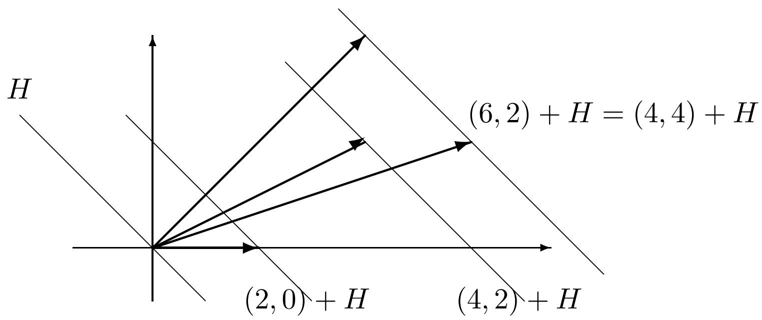
3.24. Feladat. *Válaszoljon az alábbi kérdésekre, amelyek a lineáris sokaságokkal végezhető műveletekre vonatkoznak!*

1. *Legyen H egy altér $\mathbb{R}^3$-ban. Mivel egyenlő az $(1,2,3)+H$ és a $(2,-1,-1)+H$ lineáris sokaságok összege?*
2. *Legyen H egy altér $\mathbb{R}^3$-ban. Mivel egyenlő az $(1,0,1)+H$ lineáris sokaság 6-szorosa?*
3. *Legyen H egy altér a V vektortérben. Mikor teljesül, hogy $(\underline{x}+H)+(\underline{y}+H)=H$?*
4. *Mikor teljesül, hogy $\underline{x}+\underline{y}+H=\underline{y}+H$?*
5. *Legyen $H=\{(x,-x)|x\in\mathbb{R}\}$ egy $\mathbb{R}^2$-beli altér és tekintsük a $\lambda(1,1)+H$ alakú lineáris sokaságokat. Ezek közül melyikkel lesz egyenlő a $(4,2)+H$ és a $(2,0)+H$ lineáris sokaságok összege?*

Megoldás.

1. Két lineáris sokaság összege az alábbi módon van definiálva: $(\underline{x}+H)+(\underline{y}+H)=(\underline{x}+\underline{y})+H$. Így
$$((1,2,3)+H)+((2,-1,-1)+H)=(3,1,2)+H.$$
2. Lineáris sokaság skalárral való szorzásása definíció szerint: $\lambda(\underline{x}+H)=\lambda\underline{x}+H$. Eszerint
$$6((1,0,1)+H)=(6,0,6)+H.$$
3. Mivel $(\underline{x}+H)+(\underline{y}+H)=(\underline{x}+\underline{y})+H$, így ez akkor és csak akkor lesz egyenlő H-val, ha $\underline{x}+\underline{y}\in H$.
4. Pontosan akkor teljesül, hogy $\underline{x}+\underline{y}+H=\underline{y}+H$, ha $\underline{x}+\underline{y}\in\underline{y}+H$ azaz ha $\underline{x}\in H$.
5. Mivel $((4,2)+H)+((2,0)+H)=(6,2)+H$, a kérdés az, hogy milyen $\lambda\in\mathbb{R}$ szám esetén lesz $(6,2)+H=\lambda(1,1)+H$, ami pontosan akkor teljesül, ha $(6,2)\in\lambda(1,1)+H$. Ekkor
$$\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\-x\end{pmatrix},\quad\text{vagyis}\quad \begin{array}{rcl}6&=&\lambda+x\\2&=&\lambda-x\end{array}$$

valamely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Innen $x = 2$ és $\lambda = 4$, tehát $(6, 2) + H = (4, 4) + H$.

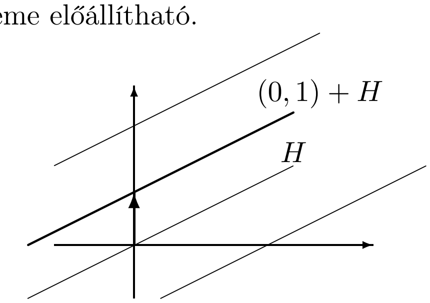


3.25. Feladat. *Határozza meg a V/H faktorteret és adja meg egy bázisát, ha*

1. *$V = \mathbb{R}^2$ és $H = \mathcal{L}((2, 1))$,*
2. *$V = \mathbb{R}^3$ és $H = \mathcal{L}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$,*
3. *$V = \mathbb{R}^3$ és $H = \mathcal{L}((0, 0, 1))$,*
4. *$V = \mathbb{C}$ és $H = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) = 0\}$ azaz a valós számok,*
5. *$V = \mathcal{P}_4$ és a H alteret a $p_1 = x^2$ és a $p_2 = x$ polinomok generálják.*

Megoldás.

1. A V/H faktortér elemei az $\underline{x} + H$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ alakú lineáris sokaságok, azaz azok a párhuzamos egyenesek, amelyeknek irányvektora $(2, 1)$. A faktortér dimenziója $\dim V - \dim H = 1$, egy lehetséges bázisa például a $(0, 1) + H$ lineáris sokaság, ennek skalárszorosaként a faktortér valamennyi eleme előállítható.



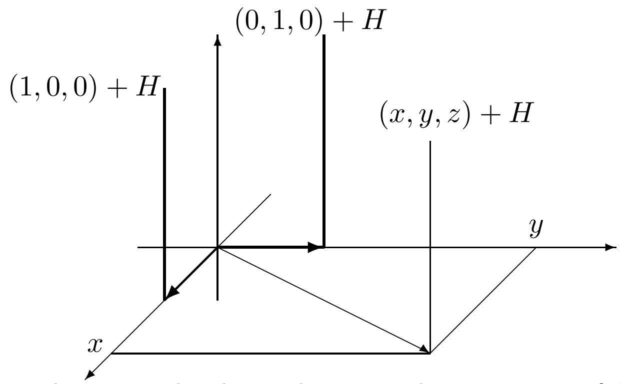
2. A V/H faktortér elemei az $\underline{x} + H$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ alakú lineáris sokaságok, azaz az $[x, z]$ síkkal párhuzamos síkok. Mivel

$$(x, y, z) + H = \underbrace{(x, 0, z)}_{\in H} + (0, y, 0) + H = (0, y, 0) + H,$$

így a faktortér elemeinek megadásánál választhatunk olyan reprezentánsvektorokat, amelyeknek csak a második koordinátája nem nulla: $V/H = \{(0, y, 0) + H | y \in \mathbb{R}\}$. A faktortér dimenziója: $\dim V - \dim H = 1$, egy lehetséges bázisa a $(0, 1, 0) + H$ lineáris sokaság.

3. A faktortér elemei az $\underline{x} + H$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ alakú lineáris sokaságok, azaz a z-tengellyel párhuzamos egyenesek. A faktortér 2-dimenziós, egy lehetséges bázisát adják az $(1, 0, 0) + H$, $(0, 1, 0) + H$ alakú lineáris sokaságok, tehát $V/H = \{(x, y, 0) + H | x, y \in \mathbb{R}\}$. Valóban, egy tetszőleges $\underline{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vektor esetén $(x, y, z) + H = (x, y, 0) + H$, így ennek a lineáris sokaságnak a felírása ebben a bázisban:

$$x((1, 0, 0) + H) + y((0, 1, 0) + H) = (x, y, 0) + H = (x, y, z) + H$$



4. A komplex számoknak a valós számok szerint vett faktorterének elemei olyan, komplex számokból álló halmazok, amelyekben a számok képzetes része azonos. Valóban, $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ elemei a $z + \mathbb{R}$ alakú halmazok, és ha a $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ számok képzetes része azonos, akkor $z_1 + \mathbb{R} = z_2 + \mathbb{R}$: $z_1 + \mathbb{R} = (a_1 + bi) + \mathbb{R} = bi + \mathbb{R} = (a_2 + bi) + \mathbb{R} = z_2 + \mathbb{R}$. Így a faktortér elemeinek leírásához választhatunk olyan reprezentánsokat, amelyeknek valós része nulla, tehát $\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{bi + \mathbb{R} | b \in \mathbb{R}\}$. A faktortér 1-dimenziós, egy lehetséges bázisa $i + \mathbb{R}$.

5. A faktortér elemei

$$a_4x^4 + a_3x^3 + \underbrace{a_2x^2}_{\in H} + \underbrace{a_1x}_{\in H} + a_0 + H = a_4x^4 + a_3x^3 + a_0 + H$$

alakúak, tehát azok a polinomok, amelyekben csak a másod- illetve az elsőfokú tag együtthatója tér el, ugyanabba a lineáris sokaságba tartoznak és együttesen adják ki a faktortérnek egy elemét. V/H dimenziója: $\dim V - \dim H = 5 - 2 = 3$, egy lehetséges bázisát adják az $x^4 + H$, $x^3 + H$, $1 + H$ halmazok.

4. fejezet

Mátrixok, lineáris egyenletrendszerek

1. Mátrixok

4.1. Feladat. *Állapítsuk meg, hogy az alábbi mátrixok szorzata értelmezve van-e, és ha igen, akkor milyen típusú mátrix lesz az eredmény:*

$$(a)\quad A_{3\times 2}\cdot B_{2\times 7},\quad (b)(A_{2\times 3})^T\cdot B_{2\times 2},\quad (c)A_{1\times 3}\cdot B_{1\times 3},$$

$$(d)(A_{1\times 3})^T\cdot B_{1\times 3},\quad (e)(A_{7\times 1})^T\cdot B_{7\times 1},\quad (f)A_{3\times 2}\cdot B_{2\times 4}\cdot C_{4\times 5}.$$

Megoldás. Két mátrixot akkor tudunk összeszorozni, ha az első mátrixnak pontosan annyi oszlopa van, ahány sora van a másodiknak. Ebben az esetben az eredménymátrixnak annyi sora van, mint az első mátrixnak, és annyi oszlopa, mint a második mátrixnak. Ezek alapján a feladat megoldása a következő:

(a) A szorzat értelmezett, az eredménymátrix 3×7 típusú.
(b) Az $A_{2\times 3}$ mátrix transzponáltja 3×2 típusú, így a szorzat értelmezett, az eredménymátrix 3×2 típusú.
(c) A szorzat nem értelmezett, hiszen az első mátrixnak három oszlopa van, míg a másodiknak csak 1 sora.
(d) A szorzat értelmezett, az eredménymátrix 3×3 típusú.
(e) A szorzat értelmezett, az eredménymátrix 1×1 típusú, azaz egy valós szám.
(f) A mátrixszorzás asszociativitását felhasználva:

$$A_{3\times 2}\cdot B_{2\times 4}\cdot C_{4\times 5}=(A_{3\times 2}\cdot B_{2\times 4})\cdot C_{4\times 5}=(AB)_{3\times 4}\cdot C_{4\times 5},$$

tehát a szorzat értelmezett és az eredménymátrix 4×5 típusú.

4.2. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi szorzatokat:*

$(a)\quad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix},\qquad (b)\quad \begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix},$

$(c)\quad \begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 5\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\qquad (d)\quad \begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 1 & 9 & 11\end{pmatrix},$

$(e)\quad \begin{pmatrix}4 & 1 & -3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ -7\\ 2\end{pmatrix},\qquad (f)\quad \begin{pmatrix}0 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$

$(g)\quad \begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 2 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix},\qquad (h)\quad \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7\\ 2 & 1 & 4 & 2\end{pmatrix}.$

Megoldás.

(a) A sor-oszlop kompozíciós szorzás definíciója alapján a szorzatmátrix i-edik sorának j-edik elemét úgy kapjuk meg, hogy az első mátrix i-edik sorában lévő elemeket rendre beszorozzuk a második mátrix j-edik oszlopában lévő elemekkel, és ezeket a szorzatokat összeadjuk. Ezek alapján

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8\\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}.$$

Mátrixok szorzása szemléltethető az alábbi módon is:

$$\begin{array}{cc|cc} & & 5 & \mathbf{6} \\ & & 7 & \mathbf{8} \\ \hline 1 & 2 & 19 & 22 \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & 43 & \boxed{\mathbf{50}} \end{array}$$

Ennél a felírásnál jól látható, hogy egy adott elem kiszámításánál melyik sort melyik oszloppal kell szorozni.

(b) $\begin{pmatrix}72 & 20\\ 18 & 5\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 5 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix}9 & 14 & 7\\ 20 & 38 & 32\\ 4 & 11 & 12\end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix}7\\ 5\end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix}5 & 5\end{pmatrix}$ (g) nincs értelmezve (h) $\begin{pmatrix}4 & 2 & 8 & 4\\ 5 & 5 & 13 & 11\end{pmatrix}$

4.3. Feladat. *Legyen* $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Számítsuk ki az* $(\underline{x} \cdot \underline{x}^T)^3$ *és* $(\underline{x}^T \cdot \underline{x})^3$ *értékeket.*

Megoldás.

$$\begin{aligned}
(\underline{x} \cdot \underline{x}^T)^3 &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}^3 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 14 & 42 & 28 \\ 42 & 126 & 84 \\ 28 & 84 & 56 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 196 & 588 & 392 \\ 588 & 1764 & 1176 \\ 392 & 1176 & 784 \end{pmatrix}. \\
(\underline{x}^T \cdot x)^3 &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)^3 = (1+9+4)^3 = 14^3 = 2744.
\end{aligned}$$

4.4. Feladat. *Határozzuk meg az* $f(x) = 2x^2 - 3x + 2x^0$ *polinom értékét a megadott helyen:*

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad (b) \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás.

(a)

$$\begin{aligned}
& 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^0 \\
&= \begin{pmatrix} 8 & 12 & 16 \\ 4 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b)

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 15 & 7 \end{pmatrix}.$$

4.5. Feladat. *Legyen A és B olyan mátrixok, melyek esetén értelmezve van az AB szorzat. Az alábbi állítások közül melyek igazak:*

1. *AB sorvektorai a B sorvektorainak lineáris kombinációi.*
2. *AB sorvektorai az A sorvektorainak lineáris kombinációi.*
3. *AB oszlopvektorai az A oszlopvektorainak lineáris kombinációi.*
4. *AB oszlopvektorai az A sorvektorainak lineáris kombinációi.*

Megoldás.

1. Legyen $A \in \mathcal{M}_{k\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Jelöljük az A mátrix elemeit a_{ij}-vel, a B mátrix elemeit b_{jl}-vel, j-edik sorvektorát $\underline{b}_j$-vel illetve az AB mátrix i-edik sorvektorát $\underline{c}_i$-vel ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, n$; $l = 1, \dots, m$). Az AB mátrix i-edik sorának elemei az A mátrix i-edik sorának és a B mátrix oszlopainak sor-oszlop kompozíciós szorzatai, tehát
$$\begin{aligned} \underline{c}_i &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{j1}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{j2}, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jm}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}b_{j1}, a_{ij}b_{j2}, \dots, a_{ij}b_{jm}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jm}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\underline{b}_j. \end{aligned}$$
Így $\underline{c}_i$ valóban előáll a B vektor sorvektorainak lineáris kombinációjaként, az állítás igaz.
2. Az előző pont alapján adódik, hogy az állítás nem igaz.
3. Az 1. ponthoz hasonlóan belátható, hogy az állítás igaz.
4. Az előző pont alapján adódik, hogy az állítás nem igaz.

4.6. Feladat. *Mutassuk meg, hogy felső trianguláris mátrixok szorzata is felső trianguláris.*

Megoldás. Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ és $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ felső trianguláris mátrixok. Egy kvadratikus mátrix pontosan akkor felső trianguláris, ha főátlója alatt mindenütt 0 van, így

$$(*)\qquad \text{ha } i > j, \text{ akkor } a_{ij} = 0 \text{ és } b_{ij} = 0.$$

Legyen $AB := C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Azt kell igazolnunk, hogy ha $i > j$, akkor $c_{ij} = 0$. Legyen $1 \le j < i \le n$. Ekkor $(*)$ miatt

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj} = \sum_{l=1}^{i-1} \underbrace{a_{il}}_{0} b_{lj} + \sum_{l=i}^{n} a_{il} \underbrace{b_{lj}}_{0} = 0,$$

amit bizonyítani akartunk.

4.7. Feladat. *Legyen $A = (a_{ij})$ és $B = (b_{ij})$ $n \times n$ típusú mátrixok, melyek minden sorában az elemek összege 1. Igazoljuk, hogy $AB = (c_{ij})$ is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.*

Megoldás. Legyen $1 \leq i \leq n$. Ekkor

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_{sj}}_{1} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} = 1.$$

4.8. Feladat. *Igazoljuk, hogy nem léteznek olyan A és B kvadratikus mátrixok, melyekre $AB - BA = E$ teljesülne, ahol E az egységmátrixot jelöli.*

Megoldás. Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ és $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$. A bizonyításban azt használjuk fel, hogy az $E \in \mathcal{M}_{n \times n}$ egységmátrix főátlójában lévő elemek összege n. Legyen $AB - BA := C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Ekkor

$$c_{ii} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{li} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki},$$

így a C mátrix főátlójában lévő elemek összege:

$$\begin{aligned} c_{11} + \cdots + c_{nn} &= \sum_{l=1}^{n} a_{1l} b_{l1} - \sum_{k=1}^{n} b_{1k} a_{k1} + \cdots + \sum_{l=1}^{n} a_{nl} b_{ln} - \sum_{k=1}^{n} b_{nk} a_{kn} \\ = \ & \sum_{l=1}^{n} a_{1l} b_{l1} + \cdots + \sum_{l=1}^{n} a_{1n} b_{ln} - \left(\sum_{k=1}^{n} b_{1k} a_{k1} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} b_{nk} a_{kn} \right) \\ = \ & \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} b_{lk} - \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{kl} b_{lk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} b_{lk} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} b_{lk} = 0. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy C nem lehet az egységmátrix.

4.9. Feladat. *Adjunk meg olyan 2×2 nemzéró mátrixot, melynek a négyzete a zérómátrix.*

Megoldás. Például a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix teljesíti a kívánt feltételt.

4.10. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}.$$

Megoldás. A feladatot n szerinti teljes indukcióval látjuk be. Az állítás $n = 1$ esetén nyilvánvalóan teljesül. Tegyük fel, hogy az egyenlőség igaz $n = k$ esetén, azaz

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{pmatrix}.$$

Ekkor, felhasználva a mátrixszorzás asszociativitását, $n = k + 1$-re

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos kx & -\sin kx \\ \sin kx & \cos kx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos kx \cos x - \sin kx \sin x & -(\cos kx \sin x + \sin kx \cos x) \\ \sin kx \cos x + \cos kx \sin x & \cos kx \cos x - \sin kx \sin x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k+1)x & -\sin(k+1)x \\ \sin(k+1)x & \cos(k+1)x \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

amely éppen az állítás $n = k + 1$-re. A bizonyítás utolsó lépésében a

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

azonosságokat használtuk.

4.11. Feladat. *Mutassuk meg, hogy*

(a) *szimmetrikus mátrixok összege is szimmetrikus,*
(b) *ferdeszimmetrikus mátrixok összege is ferdeszimmetrikus,*
(c) *bármely kvadratikus mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdeszimmetrikus mátrix összegeként,*
(d) *ferdeszimmetrikus mátrix főátlójában mindenütt nulla áll,*
(e) *ha A és B szimmetrikus továbbá $AB = BA$, akkor AB is szimmetrikus.*

Megoldás.

(a) Legyen A és B szimmetrikus mátrixok, azaz $A^T = A$ és $B^T = B$. Ekkor $(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$, tehát az $A + B$ mátrix is szimmetrikus.
(b) Legyen A és B ferdeszimmetrikus mátrixok, azaz $A^T = -A$ és $B^T = -B$. Ekkor $(A + B)^T = A^T + B^T = -A + (-B) = -(A + B)$, tehát az $A + B$ mátrix is ferdeszimmetrikus.
(c) Legyen A kvadratikus mátrix. Ekkor az $A_1 := \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ mátrix szimmetrikus, az $A_2 := \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$ mátrix ferdeszimmetrikus és $A = A_1 + A_2$.

(d) Az A kvadratikus mátrix főátlójában lévő elemek a transzponálás során a helyükön maradnak. Így az $A^T = -A$ egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha ezen elemek megegyeznek önmaguk -1-szeresével, melyből következik, hogy nullával egyenlőek.

(e) A feladat feltételele szerint $AB = BA$. Ezért $(AB)^T = B^T \cdot A^T = BA = AB$, tehát AB is szimmetrikus.

4.12. Feladat. *Az n-edrendű kvadratikus mátrixok terében tekintsük a szimmetrikus és a ferdeszimmetrikus mátrixok halmazát:*

$$\mathcal{S}_n = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} | A^T = A\} \qquad \mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} | A^T = -A\}.$$

Igazoljuk, hogy $\mathcal{S}_n$ és $\mathcal{A}_n$ altér $\mathcal{M}_{n\times n}$-ben, és adjuk meg ezen alterek egy bázisát és dimenzióját!

Megoldás. A 4.11. feladat szerint az összeadás nem vezet ki sem $\mathcal{S}_n$-ből, sem $\mathcal{A}_n$-ből. Felhasználva a $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ azonosságot adódik, hogy a skalárszorzás sem vezet ki a fenti halmazokból, így vektorteret alkotnak. $\mathcal{S}_n$ egy bázisa:

$$n \text{ db.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$n-1 \text{ db.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$1 \text{ db.} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ugyanis a megadott mátrixok szimmetrikusak és lineáris kombinációikkal előállítható az összes szimmetrikus mátrix, tehát $\mathcal{S}_n$ generátorrendszerét alkotják. Másrészt lineárisan függetlenek is, hiszen a

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_s \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_s & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

mátrix csak akkor lehet egyenlő a zérusmátrixszal, ha $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0$. A bázis elemszáma, $s = 1+2+\dots+(n-1)+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, így $\mathcal{S}_n$ $\dfrac{n(n+1)}{2}$ dimenziós.

$\mathcal{A}_n$ egy bázisának megkonstruálása teljesen hasonlóan kapható. Figyelembe kell venni, hogy a 4.11. feladat alapján ferdeszimmetrikus mátrix főátlójában csak 0 állhat, így n darabbal kevesebb báziselemünk lesz (az $\mathcal{S}_n$ bázisában szereplő első n elemre itt nincs szükség).

$\mathcal{A}_n$ egy bázisa:

$$\begin{array}{lccc}
n-1 \text{ db.} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\vdots & & & \vdots \\
1 \text{ db.} & & & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Így $\mathcal{A}_n$ dimenziója $1 + 2 + \dots + (n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

4.13. Feladat. *Jelölje $E^{(ij)}$ azt a $n \times n$ típusú (elemi) mátrixot, amelyiket úgy kapunk az egységmátrixból, hogy annak i-edik sorát felcseréljük a j-edik sorával. Mi történik akkor, ha egy mátrixot balról illetve jobbról beszorzunk $E^{(ij)}$-vel?*

Megoldás. Legyen $\underline{e}_k$ az egységmátrix k-adik sorvektora, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Ekkor

$$\underline{e}_k \cdot A = (a_{k1}, \dots, a_{kn}),$$

azaz az A mátrix k-adik sora. Az $E^{(ij)}$ mátrixszal balról való szorzásnál, a sor-oszlop kompozíciós szorzás definíciója miatt tehát az A mátrix sorai lesznek az eredménymátrix sorai. Azonban az A mátrix i-edik sora az eredménymátrix j-edik sorában, az A mátrix j-edik sora pedig az eredménymátrix i-edik sorában szerepel, tehát az $E^{(ij)}$ mátrixszal balról való szorzás az i-edik sort felcseréli a j-edik sorral az A mátrixban.

Hasonló gondolatmenettel látható be, hogy az $E^{(ij)}$ mátrixszal jobbról való szorzás az i-edik és j-edik oszlopok felcserélését eredményezi.

Példa:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\7&8&9\\4&5&6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&3&2\\4&6&5\\7&9&8\end{pmatrix}$$

4.14. Feladat. *Adjunk meg olyan 3×3 mátrixot, amellyel a balról való szorzás minden 3×3-as mátrix első sorát megkétszerezi, a harmadikhoz pedig hozzáadja a második sor háromszorosát.*

Megoldás. Ismert, hogy amilyen elemi átalakításokkal keletkezik az E egységmátrixból az ε elemi mátrix, ugyanolyan elemi átalakításokkal keletkezik az A-ból az εA mátrix. Ezt a tételt kétszer alkalmazva adódik, hogy megkapjuk a kívánt mátrixot, ha az egységmátrixon elvégezzük a megadott átalakításokat, azaz első sorát megkétszerezzük, harmadik sorához pedig hozzáadjuk a második háromszorosát. Tehát a keresett mátrix:

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$$

Például:

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&5\\4&5&6\\13&16&19\end{pmatrix}.$$

4.15. Feladat. *Mikor invertálható az $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ mátrix? Hogyan számítjuk ki az inverzét?*

Megoldás. Az A mátrix invertálható, ha létezik olyan $X=(x_{ij})\in\mathcal{M}_{2\times 2}$ mátrix, melyre $AX=E$, azaz ha megoldható a következő egyenlet:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

A fenti mátrixegyenlet a következő lineáris egyenletrendszerekkel ekvivalens:

$$\left.\begin{aligned}ax_{11}+bx_{21}&=1\\cx_{11}+dx_{21}&=0\end{aligned}\right\}\qquad\qquad\left.\begin{aligned}ax_{12}+bx_{22}&=0\\cx_{12}+dx_{22}&=1\end{aligned}\right\}$$

Az első egyenletrendszer első egyenletéből adódik, hogy a és b egyszerre nem lehet nulla. Tegyük fel például, hogy $a\neq 0$. Ekkor, a második egyenletrendszer második egyenletéből az első egyenlet $\dfrac{c}{a}$ –szorosát kivonva, majd a második egyenletet a-val beszorozva a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} ax_{12}+ \quad\quad bx_{22} &= 0 \\ (ad-bc)x_{22} &= a \end{aligned}$$

Ez az egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha $ad-bc \neq 0$ és ekkor $x_{22} = \frac{a}{ad-bc}$ és $x_{12} = \frac{-b}{ad-bc}$ (ugyanezen eredményre jutottunk volna a $b \neq 0$ feltevés használatával). Hasonlóan gondolkodva kapjuk, hogy az első egyenletrendszer is pontosan akkor oldható meg, ha $ad-bc \neq 0$, és megoldása $x_{11} = \frac{d}{ad-bc}$ és $x_{21} = \frac{-c}{ad-bc}$.

Összefoglalva, az A mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha $ad-bc \neq 0$, és ebben az esetben a fenti egyenletrendszerek megoldásával kapjuk meg A inverzét:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

4.16. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi* 2×2*-es mátrixok inverzét, ha az létezik:*

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad (c) \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad (d) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. A 4.15. feladat eredményeit használjuk a megoldás során.

(a) A mátrix invertálható és inverze: $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(b) A mátrix nem invertálható, hiszen a főátlóban lévő elemek szorzata megegyezik a mellékátlóban lévő elemek szorzatával.

(c) A mátrix invertálható és inverze:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(d) A mátrix invertálható és inverze önmaga.

4.17. Feladat. *Határozzuk meg Gauss-féle szimultán eliminációval a következő mátrixok inverzét, ha létezik:*

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (b)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad (c)\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (e)\quad \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (f)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás. A Gauss-féle szimultán elimináció során egy A mátrixot elemi sorátalakítások segítségével egységmátrixszá próbálunk alakítani, eközben az A mátrixon végrehajtott átalakításokat szimultán módon végrehajtjuk az egységmátrixon is. Amennyiben az A mátrix átalakítható egységmátrixszá (sorekvivalens az egységmátrixszal), akkor A invertálható, és ugyanezen sorátalakításokkal E-ből megkapjuk A^{-1}-et. Az elemi sor átalakítások a következőek lehetnek:

1. A mátrix sorának skalárszorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz.
2. A mátrix két sorát felcseréljük.
3. A mátrix egy sorát zérustól különböző skalárral megszorozzuk.

(a) A mátrixunk mellé írjuk az egységmátrixot. Az átalakításokat szimultán végezzük, azaz a két mátrixot egyként kezeljük, a sorokkal végzett műveletek során a teljes sorokkal számolunk. A törtekkel való nehézkes számolások elkerülése céljából érdemes bizonyos sorokat alkalmas skalárokkal beszorozni.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 18 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tehát a mátrix invertálható és inverze $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 9 & -2 & -5 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Ha az az elem nulla, amelynek a segítségével az oszlopának többi elemét nullázni kellene, akkor az alatta lévő sorok valamelyikével felcserélve elérjük, hogy nem nulla elem kerüljön a helyére. Ha ezt nem tudjuk megtenni, akkor a mátrix nem invertálható, hiszen nem sorekvivalens az egységmátrixszal. Az elimináció lépései:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Tehát a mátrix nem invertálható, az elimináció tovább nem folytatható.

(c) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -11 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -4/3 & 1/3 & 16/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 7/24 & -11/24 & -19/24 \\ 1/24 & -5/24 & 11/24 \\ -1/12 & 5/12 & 1/12 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

4.18. Feladat. *Számítsuk ki az A mátrix inverzét, és ennek segítségével határozzuk meg az $A \cdot X = B$ mátrixegyenlet megoldásait:*

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -14 & 8 & -5 \\ 11 & 14 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 10 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Megoldás.

(a) Gauss-féle szimultán eliminációval számoljuk ki az A mátrix inverzét:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 13 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 29 & -2 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tehát $A^{-1} = \begin{pmatrix} 29 & -2 & -13 \\ 11 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Az $AX = B$ egyenlet mindkét oldalát balról beszorozva az A^{-1} mátrixszal kapjuk, hogy $\underbrace{A^{-1}A}_{E}X = A^{-1}B$, azaz

$$X = \begin{pmatrix} 29 & -2 & -13 \\ 11 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 \\ -14 & 8 & -5 \\ 11 & 14 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 85 & 155 & 21 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 41 & 2 \\ 5 & -20 & -1 \\ 11 & -46 & -2 \end{pmatrix}$ és $X = \begin{pmatrix} 107 & -28 & 74 \\ -52 & 14 & -36 \\ -119 & 32 & -83 \end{pmatrix}$.

4.19. Feladat. *Legyen A kvadratikus mátrix. Igazoljuk, hogy ha $A^n = 0$ valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor $E - A$ invertálható, ahol E jelöli az egységmátrixot.*

Megoldás. Ha $A^n = 0$, akkor az $E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ mátrix az $E - A$ mátrix inverze, hiszen

$$\begin{aligned} & (E - A) \cdot (E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) \\ = \; & (E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) - (A + A^2 + \cdots + A^{n-1} + A^n) \\ = \; & E - A^n = E - 0 = E. \end{aligned}$$

2. Determináns

4.20. Feladat. *Igazoljuk, hogy egy permutációban lévő inverziók száma megyegyezik a permutációban szereplő azon elempárok számával, melyeknél a nagyobb megelőzi a kisebbet.*

Megoldás. Az állítást a permutáció elemszáma szerinti teljes indukcióval végezhetjük. Az állítás $n = 2$ esetén nyilvánvaló. Tegyük fel, $n = k$ esetén az állítás igaz, azaz bármely k elemű permutációban az inverziók száma megyezezik a permutációban szereplő azon elempárok számával, melyeknél a nagyobb megelőzi a kisebbet.
Legyen adott az $\begin{pmatrix} 1 & \ldots & l & l+1 & \ldots & k & k+1 \\ i_1 & \ldots & i_l & i_{l+1} & \ldots & i_k & i_{k+1} \end{pmatrix}$ permutáció, melynek legnagyobb eleme i_l. Nyilván i_l-t $k - l$ szomszédos elem felcserélésével tudjuk a $k+1$-edik helyre vinni, mely éppen egyenlő a feladatban megfogalmazott tulajdonsággal rendelkező azon elempárok számával, melyekben i_l

szerepel. Az így kapott $\begin{pmatrix} 1 & \dots & l & \dots & k & k+1 \\ i_1 & \dots & i_{l+1} & \dots & i_k & i_l \end{pmatrix}$ permutációban már csak az első k darab elem között lehet olyan elempár, melyekben a nagyobb megelőzi a kisebbet, és az indukciós feltevés miatt ez éppen egyenlő az $\begin{pmatrix} 1 & \dots & l & \dots & k \\ i_1 & \dots & i_{l+1} & \dots & i_k \end{pmatrix}$ permutáció inverzióinak számával. A fentiekből következik az állítás.

4.21. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi permutációkban az inverziók számát, és a permutáció paritását:*

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad (c)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Megoldás.

(a) A 4.20 feladat alapján elegendő megszámolni, hogy hány olyan elempár van, melyeknél a nagyobb megelőzi a kisebbet. A 4 megelőzi a nála kisebb $1, 2, 3$ elemeket, továbbá a 2 megelőzi az 1-et. Így összesen 4 ilyen elempár létezik, tehát az inverziók száma 4. A permutáció paritása az inverziók számának paritása, tehát páros.

(b) Az inverziók száma 2, így a permutáció páros.

(c) Az inverziók száma 7, így a permutáció páratlan.

4.22. Feladat. *Fellépnek-e az alábbi szorzatok egy $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{6\times 6}$ mátrix determinánsában? Ha igen, állapítsuk meg, hogy milyen előjellel.*

(a) $a_{22}a_{33}a_{11}a_{44}a_{55}$, (b) $a_{34}a_{12}a_{61}a_{56}a_{23}a_{45}$, (c) $a_{11}a_{23}a_{64}a_{22}a_{56}a_{45}$,
(d) $a_{62}a_{53}a_{41}a_{26}a_{15}a_{32}$, (e) $a_{34}a_{16}a_{25}a_{43}a_{52}a_{61}$, (f) $a_{25}a_{36}a_{11}a_{42}a_{64}a_{53}$.

Megoldás.

(a) A szorzatban csak 5 tag szerepel (nem 6), tehát nem léphet fel a determinánsban.

(b) $a_{34}a_{12}a_{61}a_{56}a_{23}a_{45} = a_{61}a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{56}$, melyből könnyen leolvasható, hogy minden sorból és minden oszlopból pontosan 1 elem szerepel a szorzatban, tehát a determinánsban fellép ilyen tag.
Az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ permutáció inverzióinak száma 5, azaz paritása páratlan, így a szorzat negatív előjellel szerepel.

(c) $a_{11}a_{23}a_{64}a_{22}a_{56}a_{45} = a_{11}a_{22}a_{23}a_{64}a_{45}a_{56}$, melyről könnyen leolvasható, hogy a második sorból két elem is szerepel a szorzatban. Így a szorzat nem fordulhat elő a determinánsban.

(d) $a_{62}a_{53}a_{41}a_{26}a_{15}a_{32} = a_{41}a_{32}a_{62}a_{53}a_{15}a_{26}$, melyben a második oszlopból két tag is szerepel. Így a szorzat nem fordulhat elő a determinánsban.

(e) Páratlan előjellel szerepel a szorzat.

(f) Páros előjellel szerepel a szorzat.

4.23. Feladat. *Igazoljuk, hogy az* $M = (m_{ij})$ *mátrix determinánsa* 0, *ha*

(a) M $n \times n$ *típusú mátrix, melyben több, mint* $n^2 - n$ *darab elem* 0.
(b) M *páratlan rendű ferdeszimmetrikus mátrix.*

Megoldás.

(a) Egy $n \times n$ típusú mátrix determinánsában minden tagban n darab tényezőt szorzunk össze. Azonban egy ilyen mátrixnak n^2 darab eleme van, ezért M-nek n-nél kevesebb nem 0 eleme van. Így a determinánsban nincs olyan szorzat, melyben ne szerepelne a 0, tehát minden tag 0, következésképpen a determináns is.

(b) Felhasználva, hogy determinánsnál sorból skalárt kiemelhetünk, továbbá bármely A mátrix esetén $|A| = \left|A^T\right|$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
|M| &= \left|M^T\right| = |-M| = \begin{vmatrix} -m_{11} & -m_{12} & \dots & -m_{1n} \\ -m_{21} & -m_{22} & \dots & -m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \dots & -m_{nn} \end{vmatrix} \\
&= -1 \cdot \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ -m_{21} & -m_{22} & \dots & -m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \dots & -m_{nn} \end{vmatrix} = \dots \\
&= (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n |M| = -|M|,
\end{aligned}$$

melyből azonnal adódik, hogy $|M| = 0$.

4.24. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi determinánsokat Sarrus-szabállyal:*

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad (b)\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \quad (c)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (d)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (e)\ \begin{vmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 16 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Megoldás.

(a) A Sarrus-szabály kétszer kettes mátrixokra a következő:

$$\begin{array}{cc} + & - \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{array} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22},$$

azaz a főátlóban lévő elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlóban lévő-ek szorzatát. Így $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2.$

(b) A determináns értéke $14 - 4 = 10$.

(c) Háromszor hármas mátrixok determinánsának kiszámítása a következő:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}. \end{array}$$

Tehát a "főátló irányúak" szorzatainak és a "mellékátló irányúak" szorzatainak a különbsége a determináns. Célszerű a determináns kiszámítását a plussz oszlopok felírása nélkül megtanulni. Ehhez nyújt segítséget a következő ábra:

$$\overset{+}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad \overset{-}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

A pozitív tagokat a főátló és a főátlóval párhuzamos oldalú háromszőgek, a negatív tagokat pedig a mellékátló és a mellékátlóval párhuzamos oldalú háromszögek tartalmazzák. Tehát

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 10 + 8 - 20 - 6 - 6 = -5.$$

(d) A determináns értéke -1.

(e) A determináns értéke 314.

4.25. Feladat. *Trianguláris alakra hozással számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát:*

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Megoldás.

(a) Az adott mátrix (a 3×3 típusú egységmátrix) eleve háromszög alakú, így determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata, tehát 1.

(b) Gauss-féle eliminációval átalakítjuk a mátrixot háromszög alakúvá. Oda kell figyelni arra, hogy sorcserénél a determináns ellentétes előjelűvé vált, továbbá arra, hogy ha egy sort skalárral szorzok, a skalár kiemelhető a determinánsból, és ezzel elkerülhető a törtekkel való számolás. Tehát

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 4 & 10 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 13 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 45.$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(d) -16.
(e) -56.
(f) 0.

4.26. Feladat. *A kifejtési tétel használatával számítsuk ki az alábbi determinánsokat:*

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(d)\quad \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad (e)\quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 9 & 8 \end{vmatrix} \qquad (f)\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 7 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Megoldás.

(a) A kifejtési tétel használatakor célszerű olyan sorokat vagy oszlopokat kiválasztani, amelyekben sok a 0, így a számítások gyorsabban végezhetőek. Fejtsük ki a determinánst a negyedik sora szerint, a 3×3 determinánsokat pedig a Sarrus-szabállyal számolhatjuk:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &+ 3 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 6 + 0 = -14. \end{aligned}$$

(b) A második oszlop szerint kifejtve számolunk:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &+ 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 1 \cdot 10 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-6) = 4. \end{aligned}$$

(c) A sok 0 miatt célszerű az első két oszlop szerinti kifejtéssel számolnunk:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &+ (-1)^{(2+3)+(1+2)} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{(3+4)+(1+2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 0 + 1 \cdot (-2) = -2. \end{aligned}$$

(d) 22.
(e) 45.
(f) 5.

4.27. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:*

$$(a)\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \qquad (b)\quad \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad (c)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & -7 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ -9 & 3 & 6 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

Megoldás.

(a) Nagyobb mátrixok determinánsának kiszámításánál érdemes kombinálni a Gauss-féle eliminációt a kifejtési tétellel. Először eliminációval átalakítjuk az első két oszlopot, majd ezen oszlopok szerint kifejtünk, mely kifejtésben csak egy tag lesz, ami nem 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -6 \\ 7 & 4 & 13 \end{vmatrix} = 1 \cdot 180 = 180.$$

(b) 196.
(c) 51.

4.28. Feladat. *Határozzuk meg az A mátrix determinánsát, ha az A mátrix a_{ij} elemét a következőképpen értelmezzük:*
(a) $a_{ij} = \min(i, j)$,
(b) $a_{ij} = \max(i, j)$.

Megoldás.

(a) Gauss-féle eliminációval felső trianguláris alakra hozzuk a mátrixot:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

(b) Gauss-féle eliminációval alsó trianguláris alakra hozzuk a mátrixot:

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 0 \end{vmatrix}
$$
$$
= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n,
$$

ahol az utolsó lépésben $n-1$ darab szomszédos sor cseréjével elértük, hogy a felső sor alulra kerüljön.

4.29. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi n-edrendű determinánsok értékét ($n > 1$):*

$$
(a) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n+1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (b) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}
$$

$$
(c) \quad \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1}+b_{n-1} \end{vmatrix} \qquad (d) \quad \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}
$$

Megoldás.

(a) Gauss-féle eliminációval számolunk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n+1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n+1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n+1 & 1 \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n!.$$

(b) A második sort kivonjuk az összes többi sorból, majd az így kapott determinánst kifejtjük a második oszlopa szerint:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\big((n-2)!\big).$$

(c) Gauss-féle eliminációval számolunk:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1}+b_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= b_1 b_2 \cdots b_{n-1}.$$

(d) A első sorhoz minden más sort hozzáadunk, így annak minden eleme $a + (n-1)b$ lesz, ezt az értéket ki tudjuk vinni a determinánsból, így az első sorban csupa 1-es lesz. Ennek b-szeresét levonjuk a többi sorból, és egy trianguláris mátrixot kapunk, melynek determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \dots & a+(n-1)b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix} \\
&= a+(n-1)b \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} \\
&= (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.
\end{aligned}$$

4.30. Feladat. *Igazoljuk kizárolag sorok (vagy oszlopok) összegzésével, hogy az alábbbi determinánsok nullák:*

$$(a) \quad \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \qquad\qquad (b) \quad \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$$

Megoldás.

(a) Az első sort ki tudom nullázni, ha a többi sort hozzáadom. A csupa nulla sort tartalmazó mátrix determinánsa pedig 0.

(b) A 3. sorból a 2. sort, a 4. sorból a 1. sort kivonva:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2-2^2 & 4^2-3^2 & 5^2-4^2 & 6^2-5^2 \\ 4^2-1^2 & 5^2-2^2 & 6^2-3^2 & 7^2-4^2 \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 3\cdot 5 & 3\cdot 7 & 3\cdot 9 & 3\cdot 11 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a 4. sor a 3. sor 3-szorosa, tehát lineárisan függőek, így a determináns 0.

4.31. Feladat. *Hogyan változik egy $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrix determinánsa, ha*

(a) *M minden elemét beszorozzuk egy rögzített λ számmal?*
(b) *megfordítjuk az oszlopok sorrendjét?*
(c) *M egy eleméhez hozzáadunk egy rögzített λ számot?*

Megoldás.

(a) Az új mátrix determinánsának minden sorából kiemelhető a λ szorzó, így értéke $\lambda^n|M|$.

(b) Ha n páros, akkor az oszlopok sorrendjének megfordítását $n/2$ oszlopcserével tudjuk megoldani, amely $n/2$ darab előjelváltással jár. Tehát a determináns nem változik, ha $n/2$ páros, és előjelet vált, ha $n/2$ páratlan, azaz éppen $(-1)^{n/2}|M|$. Hasonlóan, ha n páratlan, akkor az új mátrix determinánsa $(-1)^{(n-1)/2}|M|$.

(c) Legyen m_{ij} az az elem, melyhez hozzáadunk egy λ számot. Ha a mátrix egy sorát két sor összegére bontjuk, akkor a determináns is szétbontható. Ezt és a kifejtési tételt felhasználva:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{i1} & \dots & m_{ij}+\lambda & \dots & m_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nj} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix} &= |M| + \begin{vmatrix} m_{11} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nj} & \dots & m_{nn} \end{vmatrix} \\ &= |M| + \lambda \cdot |A_{ij}|,\end{aligned}$$

ahol $|A_{ij}|$ az m_{ij} elemhez tartozó algebrai adjungált aldetermináns. Tehát ha egy elemhez hozzáadunk egy λ számot, akkor a determináns az adott elem algebrai adjungált aldeterminánsának λ-szorosával növekszik.

4.32. Feladat. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:*

$$(a) \quad \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 3 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \quad (b) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Megoldás.

(a)

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 3 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x^2 + 12 + 3x - 6 - 3x^2 - 4x = -x^2 - x + 6,$$

így a $-x^2 - x + 2 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. A másodfokú egyenletekre vonatkozó megoldóképletet használva:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2-2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix} \\
= \quad -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1-x^2-2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix} &- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2-3(1+x^2) & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x^2 \end{vmatrix} \\
= \quad (2+3+3x^2)(3-x^2) &= (5+3x^2)(3-x^2),
\end{aligned}
$$

tehát az $(5+3x^2)(3-x^2)=0$ egyenletet kell megoldanunk. Az $5+3x^2$ tag mindig pozitív, így leosztva vele a $3-x^2=0$ egyenlethez jutunk, melynek megoldásai az $x_1=-\sqrt{3}$ és $x_2=\sqrt{3}$.

4.33. Feladat. *A λ valós szám milyen értéke esetén invertálhatóak az alábbi mátrixok?*

$$
(a) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \quad \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 3 \\ \lambda & \lambda & 2 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \quad (c) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix}
$$

Megoldás.

(a) Négyzetes mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha determinánsa nem 0. A mátrix determinánsa:

$$
\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2+0+2-0-2\lambda-2 = \lambda(\lambda-2).
$$

Tehát ha $\lambda \neq 0$ és $\lambda \neq 2$, akkor a mátrix invertálható.

(b) $\lambda \neq 0$ esetén a mátrix invertálható.

(c) $\lambda \neq \pm 2$ esetén a mátrix invertálható.

4.34. Feladat. *Határozzuk meg adjungált algebrai aldeterminánsok segítségével az alábbi mátrixok inverzét, ha létezik:*

$$
(a) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (b) \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (c) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (d) \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}
$$

(e) $\begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 8 & 12 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Megoldás. Az inverz kiszámítását javasolt az alábbi lépésekben elvégezni:

1. Kiszámolom a mátrix determinánsát.
2. A mátrixot transzponálom.
3. Az elemek helyére beírom az algebrai adjungált aldeterminánsukat.
4. Leosztok az eredeti mátrix determinánsával.

A 3. lépést meg lehet gyorsítani úgy, hogy adjungált aldeterminánst számolunk, és a végén írjuk be az előjeleket a következő szerint:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(a) A mátrix determinánsa $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$. Az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltja $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Beírjuk az elemek helyére az adjungált aldeterminánsokat: $\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$. Ahol kell, előjelet váltunk: $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Végül leosztunk a determinánssal, és kapjuk a mátrix inverzét: $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. (Lásd még a 4.15. feladatot.)

(b) A mátrix determinánsa $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$. A mátrix transzponáltja: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Beírjuk az elemek helyébe az adjungált determinánsokat: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ahol kell, előjelet váltunk: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Végül leosztunk a determinánssal, és kapjuk az inverz mátrixot:

$$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -7\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\ -1/4 & -1/2 & 7/4\\ -1/4 & 1/2 & -1/4\end{pmatrix}.$$

(c) A mátrix determinánsa 0, így nem invertálható.

(d) $\begin{pmatrix}-17/29 & 5/29 & 11/29\\ 44/29 & -1/29 & -37/29\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

(e) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1/7 & 0 & 2/7\\ 12/7 & -1 & 80/7\end{pmatrix}.$

(f) $\begin{pmatrix}-18/77 & 2/11 & -1/7 & 1/7\\ 1/7 & 0 & 1/7 & -1/7\\ 60/77 & -3/11 & 1/7 & -1/7\\ -81/77 & -2/11 & -1/7 & 8/7\end{pmatrix}.$

(g) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ -3 & -4 & 1 & -3\\ 1 & 3/2 & 0 & 1/2\\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}.$

3. Mátrix rangja

4.35. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját, az általuk generált altér dimenzióját és annak egy, az adott vektorokból álló bázisát:*

(a) $\underline{a}_1 = (2,3,0,1)$, $\underline{a}_2 = (1,1,1,-1)$, $\underline{a}_3 = (1,3,-1,2)$, $\underline{a}_4 = (0,-1,0,0)$

(b) $\underline{b}_1 = (2,1,2,3)$, $\underline{b}_2 = (4,5,6,9)$, $\underline{b}_3 = (1,2,2,3)$, $\underline{b}_4 = (4,2,4,6)$

(c) $\underline{c}_1 = (1,2,3,4)$, $\underline{c}_2 = (2,3,4,5)$, $\underline{c}_3 = (3,4,5,6)$, $\underline{c}_4 = (4,5,6,7)$

(d) $\underline{d}_1 = (2,4,3,5)$, $\underline{d}_2 = (1,3,2,7)$, $\underline{d}_3 = (4,-3,4,2)$, $\underline{d}_4 = (1,-1,1,1)$, $\underline{d}_5 = (1,3,0,0)$

(e) $\underline{e}_1 = (0,-2,1,3,2)$, $\underline{e}_2 = (1,2,-1,3,1)$, $\underline{e}_3 = (2,3,1,-1,0)$

(f) $\underline{f}_1 = (0,1,-1,1,1)$, $\underline{f}_2 = (2,2,1,3,1)$, $\underline{f}_3 = (-1,1,2,3,0)$, $\underline{f}_4 = (1,2,1,0,3)$, $\underline{f}_5 = (1,1,2,-1,2)$

Megoldás.

(a) A feladatot Gauss-féle eliminációval oldjuk meg, az átalakítások nem változtatják meg a vektorrendszer rangját. A vektorokat sorban beírjuk egy mátrixba. A vektorendszer rangja és egyben a generált altér dimenziója a lépcsős alakra hozás után kapott mátrix nem nulla sorainak száma. Ahhoz, hogy az altér egy bázisát is ki tudjuk választani a vektorrendszerből, csak nyomon kell követni, hogy mely vektor mely sorhoz tartozik. Azon vektorok alkotják a bázist, melyek sorai nem nullázódtak ki. A megoldás menete:

$$\begin{array}{c} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \underline{a}_3 \\ \underline{a}_4 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \underline{a}_2 \\ \underline{a}_1 \\ \underline{a}_3 \\ \underline{a}_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} \underline{a}_2 \\ \underline{a}_1 - 2\underline{a}_2 \\ \underline{a}_3 - \underline{a}_2 \\ \underline{a}_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \underline{a}_2 \\ \underline{a}_1 - 2\underline{a}_2 \\ \underline{a}_3 + 3\underline{a}_2 - 2\underline{a}_1 \\ \underline{a}_4 - 2\underline{a}_2 + \underline{a}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} \underline{a}_2 \\ \underline{a}_1 - 2\underline{a}_2 \\ \underline{a}_3 + 3\underline{a}_2 - 2\underline{a}_1 \\ \underline{a}_4 + \underline{a}_3 + 3\underline{a}_2 - 2\underline{a}_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Három olyan sor van, amely nem csupa nullából áll, így a vektorrendszer rangja és az általuk generált altér dimenziója 3. Látható, hogy $\underline{a}_4 + \underline{a}_3 + 3\underline{a}_2 - 2\underline{a}_1 = \underline{0}$, azaz $\underline{a}_4 = -\underline{a}_3 - 3\underline{a}_2 + 2\underline{a}_1$, így $\underline{a}_4$ függ a másik három vektortól. Az első három sorvektor viszont egymásból nem kombinálható ki, így az $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ vektorok sem kombinálhatók ki egymásból, tehát lineárisan függetlenek, ezért a generált altér egy bázisát alkotják.

(b) Az elimináció során nem kell részletesen kiírni, hogy mely sorokkal milyen műveletet végeztünk. Csak a sor-vektor megfeleltetésre van szükségünk, a vektorrendszerből kiválasztható bázis így is leolvasható:

$$\begin{array}{c} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \\ \underline{b}_4 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \underline{b}_3 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_1 \\ \underline{b}_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \underline{b}_3 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_1 \\ \underline{b}_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} \underline{b}_3 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_1 \\ \underline{b}_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát a vektorrendszer rangja és az altér dimenziója 2, a $\underline{b}_2$, $\underline{b}_3$ vektorok pedig az altér egy bázisát alkotják.

(c) A rang és a dimenzió 2, az altér egy bázisa: $\underline{c}_1, \underline{c}_2$.
(d) A rang és a dimenzió 4, az altér egy bázisa: $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3, \underline{d}_4$.
(e) A rang és a dimenzió 3, az altér egy bázisa: $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$.
(f) A rang és a dimenzió 4, az altér egy bázisa: $\underline{f}_2, \underline{f}_3, \underline{f}_4, \underline{f}_5$.

4.36. Feladat. *Maximum mennyi lehet a következő mátrixok rangja:* $A_{3\times2}$, $B_{5\times8}$, $C_{3\times9}$, $D_{4\times4}$.

Megoldás. Mivel mátrix rangja egyenlő maximális rendű, zérustól különböző aldeterminánsának rendjével, ezért a rang maximum a sorok és az oszlopok számának minimuma lehet. Tehát a mátrixok maximális rangja rendre: $2, 5, 3, 4$.

4.37. Feladat. *Legyen* $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$. *Mit mondhatunk* M *rangjáról, ha*

(a) M *determinánsa* 0*?*
(b) M *determinánsa nem* 0*?*
(c) M*-ben van* k*-adrendű* ($k \le n$) *nem zéró determináns?*
(d) M *oszlopvektorai lineárisan függetlenek?*

Megoldás.

1. M rangja kisebb, mint n, hiszen a maximális rendű determináns rendje nem lehet n.
2. M rangja n.
3. M rangja nagyobb, vagy egyenlő, mint k, hiszen a maximális rendű nem zérő determinánsának rendje legalább k.
4. M rangja n, hiszen ekkor a determinánsa nem 0.

4.38. Feladat. *Mennyi az alábbi mátrixok rangja? Adjuk meg a sorvektorai által generált altér egy bázisát, továbbá egy maximális rendű zérustól különböző determinánsát:*

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad (b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c)\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad (d)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & 7 & 6 & 7 & -11 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Megoldás.

(a) Mátrix rangja alatt a sorvektorai által alkotott vektorrendszer rangját értjük, így a rangszámítás menete a 4.35. feladattal azonos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát a mátrix rangja 3, így a sorvektorai által generált altér dimenziója is 3. A lépcsős alakra hozott mátrix nem nulla sorvektorai nyilván benne vannak a sorvektorok által generált altérben, és lineárisan függetlenek, tehát bázis alkotnak. Így az altér egy bázisa a $(2,1,1,2)$, $(0,1,0,-3)$, $(0,0,2,4)$ vektorrendszer. A 4.35. feladat alapján az eredeti mátrix soraiból is ki lehet választani bázist. A fenti eliminációnál a mátrix első, harmadik és negyedik sorvektorainak megfelelő sorok nem nullázódtak ki, így ezen sorok is bázisát alkotják az altérnek.

Mivel a mátrix rangja 3, így található benne olyan 3. rendű aldetermináns, amely értéke nem 0. Egy 4×4 típusú mátrixnak összesen 16 darab harmadrendű aldeterminánsa van, ezek között keresünk megfelelőt. Például: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$, $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -12$.

(b) A mátrix rangja 2. A sorvektorai által generált altér egy bázisa például az első két sorvektor vagy a $(1,0,2,1)$, $(0,3,-3,-1)$ vektorrendszer. Egy maximális rendű nem 0 determináns: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$.

(c) A mátrix rangja 4. A sorvektorai által generált altér egy bázisát alkotják a sorvektorok. Maximális rendű nem 0 determinánsa a mátrix determinánsa.

(d) A mátrix rangja 3. A sorvektorai által generált altér egy bázisát alkotja az első három sorvektor. Maximális rendű nem 0 determinánsa például: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -14$.

4.39. Feladat. *Milyen α, β értékek esetén lesz az alábbi mátrixok rangja $1, 2$ illetve 3?*

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \beta \end{pmatrix} \qquad (b)\quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \beta & 2\beta \end{pmatrix}$$

Megoldás.

(a) Gauss-féle eliminációval átalakítjuk a mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 2-2\alpha & 0 \\ 0 & 2 & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & \beta \\ 0 & 2-2\alpha & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & (\alpha-1)\beta \end{pmatrix}$$

A rang akkor és csak akkor 3, ha $(\alpha-1)\beta \neq 0$, azaz ha $\alpha \neq 1$ és $\beta \neq 0$. Ha $\alpha = 1$ vagy $\beta = 0$, akkor a mátrix rangja 2. Tehát a mátrix rangja semmilyen α és β érték esetén nem lehet 1.

(b) Gauss-féle eliminációval átalakítjuk a mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \beta & 2\beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \beta-\alpha \\ 0 & \beta-\alpha & 2\beta-\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \beta-\alpha & 2\beta-\alpha \\ 0 & 0 & \beta-\alpha \end{pmatrix}$$

A rang akkor és csak akkor 3, ha $\alpha \neq \beta$. Ha $\alpha = \beta$ és $2\beta = \alpha$, akkor a mátrix rangja 1. Ez csak akkor lehetséges, ha $2\beta = \beta$, azaz ha $\beta = \alpha = 0$. Így a mátrix rangja 2, ha $\alpha = \beta \neq 0$.

4. Lineáris egyenletrendszerek

4.40. Feladat. *Írja fel az alábbi egyenleteket mátrixos és vektoros alakban:*

$$(a)\quad \begin{aligned} 2x_1+x_2+2x_3 &= 2 \\ -2x_1 +2x_3 &= 3 \\ x_1-x_2-3x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3 &= 0 \\ -x_1+2x_2-\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Megoldás.

(a) A vektoros alak:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

A mátrixos alak:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) A vektoros alak:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A mátrixos alak:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.41. Feladat. *Homogén egyenletrendszer esetén mit mondhatunk a megoldástér dimenziójáról, ha*

(a) *az egyenletrendszerben 8 ismeretlen van, és az elimináció elvégzése után három egyenlet marad?*
(b) *az elimináció elvégzése után ugyanannyi egyenlet van, mint ismeretlen?*
(c) *az egyenletrendszer 4 egyenletből áll és 8 ismeretlen van?*
(d) *az egyenletrendszer 1 egyenletből áll?*

Megoldás.

(a) Mivel az alapmátrix rangja 3, a tér, amelyben a megoldásokat keressük, 8 dimenziós, így a megoldástér dimenziója $8 - 3 = 5$ (5 ismeretlent tudunk szabadon megválasztani).
(b) Az egyenletrendszer határozott, csak egy megoldás van, a nullvektor, így a dimenzió 0.
(c) A megoldástér minimum 4 dimenziós.
(d) A megoldás hiperaltér (hiperaltérnek nevezzük az n dimenziós vektortér $n - 1$ dimenziós altereit).

4.42. Feladat. *Oldja meg az alábbi homogén egyenleteket, és adja meg a megoldástér egy bázisát:*

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_4 &= 0\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0\\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0\\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 0\\ -x_1 + 2x_4 &= 0\\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= 0\\ 2x_1 + 6x_2 - x_4 &= 0\\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0\\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 0\\ 9x_1 + 10x_2 + 11x_3 + 12x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0\\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 0\\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 10x_4 &= 0\\ -6x_1 - x_2 - 9x_3 + 15x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0\\ 3x_1 + x_3 &= 0\\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0\\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás.

(a) A feladatot Gauss-féle eliminációval oldjuk meg. Mivel az egyenletrendszer homogén, a jobboldali vektor az elimináció során zérusvektor marad, így nem szükséges a kibővített mátrixszal dolgoznunk, elegendő az alapmátrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 2 & -2\\ 0 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 2 & -2\\ 0 & 15 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -16 & 7 \end{pmatrix}$$

Az elimináció során csak olyan lépéseket használunk, amelyek az egyenletrendszer megoldáshalmazát nem változtatják meg. Így az eredeti egyenletrendszerrel ekvivalens a következő:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \quad\quad + x_4 &= 0 \\ 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -16x_3 + 7x_4 &= 0 \end{aligned}$$

A négy ismeretlenből egyet tetszőlegesen megválaszthatunk, a másik három értéke ez alapján már kiszámolható. Tehát a megoldásokat egy paraméter függvényeként adjuk meg. Célszerűen, az x_4-et választjuk egy tetszőleges t valós számnak. Innen $x_3 = \frac{7}{16}t$, $x_2 = \frac{3}{8}t$ és $x_1 = -\frac{5}{8}t$. Így a megoldás

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/8 \\ 3/8 \\ 7/16 \\ 1 \end{pmatrix} t \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Ebből látható, hogy a megoldások halmaza egy 1 dimenziós altér (egyenes), melynek egy bázisa: $(-5/8, 3/8, 7/16, 1)$.

Természetesen többféle bázis is megadható egy altér esetén, így a megoldáshalmaz többféleképpen megadható. Ebben a példában a bázisvektor bármely skalárszorosát használhatnánk a megoldás felírásában.

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Tehát az eredeti egyenletrendszerrel ekvivalens a következő:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 - 5x_3 - 4x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Azonnal látható, hogy az egyenletrendszert csak az $x_4 = x_3 = x_2 = x_1 = 0$ teljesíti, így a megoldáshalmaz a zérusvektor:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Az $3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0$ egy egyenletből álló egyenletrendszerben 4 ismeretlen tetszőlegesen megválasztható, az ötödik értéke ennek alapján számolható. Legyen például $x_5 = t_1$, $x_4 = t_2$, $x_3 = t_3$ és $x_2 = t_4$. Ekkor $x_1 = \frac{1}{3}t_1 - \frac{2}{3}t_2 + \frac{1}{3}t_3 - \frac{2}{3}t_4$, így a megoldáshalmaz

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_3 + \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_4 \quad (t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}).$$

Ebből látható, hogy a megoldások halmaza egy 4 dimenziós altér, azaz egy hiperaltér, melynek bázisát alkotja az $(1/3, 0, 0, 0, 1)$, $(-2/3, 0, 0, 1, 0)$, $(1/3, 0, 1, 0, 0)$, $(-2/3, 1, 0, 0, 0)$ vektorrendszer.

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát az eredeti egyenletrendszerrel ekvivalens a következő:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Az x_3 és x_4 változók közül az egyiket tetszőlegesen megválasztva a másik értéke egyértelműen adódik. Legyen például $x_4 = t_1 \in \mathbb{R}$. Ekkor $x_3 = \frac{1}{2}t_1$. Az első egyenletbe visszahelyettesítve ezen értékeket az $x_1 + 3x_2 - \frac{3}{2}t_1 = 0$ egyenlet adódik, melyben az x_1 és x_2 változók közül az egyiket szintén tetszőlegesen megválaszthatjuk. Legyen például $x_2 = t_2$, így

$x_1 = \dfrac{3}{2}t_1 - 3t_2$ adódik. Így az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 \qquad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

Látható, hogy a megoldások halmaza egy 2 dimenziós altér, melynek egy bázisa a $(3/2, 0, 1/2, 1)$, $(-3, 1, 0, 0)$ vektorrendszer.

(e)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 \qquad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

(f)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/14 \\ 5/14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 29/7 \\ 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 \qquad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

(g)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 \qquad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

(h) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

4.43. Feladat. *Oldja meg az alábbi inhomogén lineáris egyenletrendszereket! Amennyiben megoldható az egyenletrendszer, akkor adjon meg bázist a megoldásként adódó lineáris sokaság irányterében.*

(a)
$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 9 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= -19 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 28 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(d)
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2$$

(e)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= -1\\ -x_1-x_2+2x_3 &= -1\\ 3x_1-2x_2+x_3+x_4 &= 0\\ 4x_1+2x_2+x_3+3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4 &= 3\\ x_1+x_2-x_3-x_4 &= -3 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} -x_1+2x_2+x_3+3x_4 &= -1\\ 2x_1 + x_3 &= 4\\ 2x_1+x_2+x_3+x_4 &= 2 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3+3x_4 &= 1\\ x_1 +2x_3+x_4 &= 0\\ -2x_2-3x_3+x_4 &= -4\\ -x_1-2x_2 +x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Megoldás.

(a) A feladatot Gauss-féle eliminációval oldjuk meg, a kibővített mátrixszal dolgozunk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 7 & -2 & -1 & -7\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 7 & -2 & -1 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -16 & 6 & -14 \end{array}\right)$$

Az eredeti egyenletrendszerrel ekvivalens tehát a következő:

$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3+x_4 &= 3\\ x_2+2x_3-x_4 &= 1\\ -16x_3+6x_4 &= -14 \end{aligned}$$

Az x_3 és x_4 vektorok közül az egyiket tetszőlegesen megválasztva a másik értéke egyértelműen adódik. Legyen például $x_4 = t \in \mathbb{R}$. Ekkor $x_3 = 7/8 + \dfrac{3}{8}t$, $x_2 = -3/4 + \dfrac{1}{4}t$ és $x_1 = 5/8 - \dfrac{1}{8}t$. Így a megoldás

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/8\\ -3/4\\ 7/8\\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/8\\ 1/4\\ 3/8\\ 1 \end{pmatrix} t \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Ebből látható, hogy a megoldáshalmaz által alkotott lineáris sokaság iránytere 1 dimenziós, melynek egy bázisa a $(-1/8, 1/4, 3/8, 1)$ vektor.

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ -3 & -2 & 1 & -2 & -19 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & -13 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 24 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tehát az eredeti egyenletrendszerrel ekvivalens a következő:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 - x_3 \quad &= 7 \\ 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

Látható, hogy az egyenletrendszer ellentmondásos, tehát nincs megoldása.

(c)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 72 & 8 & 40 & 8 \\ 0 & -8 & -4 & 8 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 13 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 11 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 13 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -28 & 28 \end{array}\right)$$

Tehát az eredeti egyenletrendszerrel ekvivalens a következő:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 \quad + \quad x_4 &= 0 \\ 8x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ -x_3 + 13x_4 &= -10 \\ -28x_4 &= 28 \end{aligned}$$

Ebből látható, hogy $x_4 = -1$, $x_3 = -3$, $x_2 = 1$ és $x_1 = 1$, így az egyenletrendszer határozott, ezért az iránytér nulla dimenziós. Tehát a megoldás:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(d) A megoldás hipersík (hipersíknak nevezzük egy n dimenziós vektortér azon lineáris sokaságait, melyek iránytere $n-1$ dimenziós):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t_3 \quad (t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R})$$

(e)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/7 \\ -3/7 \\ 5/7 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_2$$

(g)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2 \\ 10/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} t_1$$

(h) $x_1 = -33/8$, $x_2 = 5/3$, $x_3 = 23/24$ és $x_4 = 53/24$.

4.44. Feladat. *Milyen α és β számok esetén lesznek megoldhatóak illetve határozottak az alábbi egyenletrendszerek?*

$$(a)\quad \begin{aligned} x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 &= 2 \\ \alpha x_2 + \beta x_3 + \alpha x_4 &= -1 \\ -x_1 \qquad + \beta x_3 + 2\beta x_4 &= -2 \end{aligned} \qquad\qquad (b)\quad \begin{aligned} 2x_1 + 3\beta x_2 + 2\alpha x_3 &= 2 \\ -\alpha x_1 + \beta x_2 + \beta x_3 &= -1 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Megoldás.

(a) A feladatot Gauss-féle eliminációval oldjuk meg.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha & \alpha & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & \beta & \alpha & -1 \\ -1 & 0 & \beta & 2\beta & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha & \alpha & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & \beta & \alpha & -1 \\ 0 & \alpha & \alpha+\beta & 3\beta & 0 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \alpha & \alpha & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & \beta & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & 3\beta-\alpha & 1 \end{array}\right)$$

Tehát az eredeti egyenletrendszerrel ekvivalens a következő:

$$\begin{aligned} x_1+\alpha x_2+\alpha x_3+\quad \beta x_4 &= 2 \\ \alpha x_2+\beta x_3+\quad \alpha x_4 &= -1 \\ \alpha x_3+(3\beta-\alpha)x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Látható, hogy $\alpha=\beta=0$ esetén a feladat ellentmondásos. Minden más esetben a feladat megoldható. Ha $\alpha=0$, akkor az x_2, ha pedig $\alpha\neq 0$, akkor az x_4 változó szabadon választható. Tehát az egyenletrendszer semmilyen α és β érték esetén sem lehet határozott.

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3\beta & 2\alpha & 2 \\ \alpha & \beta & \beta & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \beta & -1 \\ 2 & 3\beta & 2\alpha & 2 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \beta & \beta-\alpha & -1-x \\ 0 & 3\beta & 2\alpha-2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \beta & \beta-\alpha & -1-x \\ 0 & 0 & 5\alpha-3\beta-2 & -3-3x \end{array}\right)$$

Tehát az eredeti egyenletrendszerrel ekvivalens a következő:

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \qquad\qquad x_3 &= 1 \\ \beta x_2+ \quad (\beta-\alpha)x_3 &= -1-\alpha \\ (5\alpha-3\beta-2)x_3 &= -3-3\alpha \end{aligned}$$

Ha $5\alpha-3\beta=2$ és $\alpha\neq 1$, akkor az egyenletrendszer ellentmondásos, minden más esetben megoldható.
Mivel az egyenletrendszerünkben 3 ismeretlen és 3 egyenlet van, így a Cramer-szabály alapján pontosan akkor határozott, ha az alapmátrix determinánsa nem nulla. Az új egyenletrendszerünk alapmátrixának determinánsa $(5\alpha-3\beta-2)\beta$, így $\beta\neq 0$ és $5\alpha-3\beta\neq 2$ esetén határozott, azaz egyértelmű a megoldása.

4.45. Feladat. *Oldja meg Cramer-szabállyal az alábbi egyenleteket:*

$$(a)\quad \begin{aligned} x_1+2x_2-x_3 &= -1\\ 2x_1+x_2+3x_3 &= -2\\ x_1+x_2+2x_3 &= -3 \end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} x_1-x_2 &= 1\\ 2x_1-3x_2+x_3 &= 3\\ 2x_1-x_2-x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} x_1-6x_2 &= 0\\ 2x_1+x_3 &= 1\\ x_2+3x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad (d)\quad \begin{aligned} -x_1+2x_2+x_3 &= -2\\ 2x_2+x_3 &= 3\\ 4x_1+3x_2+2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$(e)\quad \begin{aligned} x_2+2x_3+x_4 &= -1\\ 3x_1+2x_2+x_3-4x_4 &= 0\\ x_1-x_2+2x_3+x_4 &= 2\\ 2x_3+x_4 &= -2 \end{aligned} \qquad (f)\quad \begin{aligned} -x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= -1\\ 2x_3+x_4 &= 0\\ 3x_1+2x_2+x_3-3x_4 &= 2\\ x_1+2x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Megoldás.

(a) Jelöljük A-val az alapmátrixot. Ekkor

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad d_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 3\\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & 3\\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 10 \qquad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

Tehát a megoldás: $x_1 = \frac{d_1}{|A|} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{d_2}{|A|} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2}$ és $x_3 = \frac{d_3}{|A|} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}$.

(b) A Cramer-szabály nem alkalmazható, mert az alapmátrix determinánsa nem nulla.

(c) $x_1 = 6/35$, $x_2 = 1/35$ és $x_3 = 23/35$.

(d) $x_1 = 5$, $x_2 = 22$ és $x_3 = -41$.

(e) $x_1 = 41/21$, $x_2 = 1$, $x_3 = -37/21$ és $x_4 = 32/21$.

(f) $x_1 = -27/4$, $x_2 = 19/8$, $x_3 = 5/2$ és $x_4 = -5$.

Irodalomjegyzék

[1] Feladatlapok II. matematikából (közgazdász hallgatók számára), *Debrecen, Matematika Intézet* (2004).

[2] Kovács Zoltán: Feladatgyűjtemény lineáris algebra gyakorlatokhoz, *Debrecen, Kossuth Egyetemi Kiadó* (1998).

[3] Rimán János: Matematikai analízis feladatgyűjtemény, *Budapest, Tankönyvkiadó* (1992).

[4] Solt György: Valószínűségszámítás, *Budapest, Műszaki könyvkiadó* (1995).